Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 7 (1961)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES CORPS QUADRATIQUES

Autor: Châtelet, A.

Kapitel: 52. Corps de discriminant premier.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-37125

On peut compléter cette indication en cherchant les expressions de **K** et de **L**. Elles résultent notamment des décompositions:

$$F(49) = 25\times 17\times 31 \Rightarrow (25,\ \theta-49)\times(17,\ \theta-49)\times(31,\ \theta-49)$$
$$= (25,\ \theta-124)\times(17,\ \theta-117)\times(31,\ \theta-111) \sim 1$$

$$F(120) = 5\times 13\times 17 \Rightarrow (5, \theta-120)\times(13, \theta-120)\times(17, \theta-120) \sim 1.$$

Elles entraînent:

$$\mathbf{K} = \mathbf{I}\times\mathbf{J}^2; \quad \mathbf{L} = \mathbf{I}\times\mathbf{J}.$$

Les cycles conjugués sont aussi inverses, l'un de l'autre, de sorte que chacun d'eux est égal au carré de l'autre (exposant 2, mod. 3).

52. Corps de discriminant premier.

On va examiner quelques unes des circonstances qui peuvent se présenter dans la structure du groupe des classes des idéaux semi réduits, ou des cycles.

Dans un corps réel, dont *le discriminant est un nombre premier*, nécessairement congru à $+1$, mod. 4, il n'y a qu'*une seule classe double*, caractérisée par *un cycle, du type* 1, *d'un nombre impair d'idéaux*. Il peut exister en outre *des couples de cycles conjugués*, et associés, du type 4, qui ont aussi un nombre impair d'idéaux.

Si le cycle principal existe seul, *le corps est principal.* Dans le cas contraire l'*ordre du groupe des classes est impair* et supérieur à 1; si cet ordre est un nombre premier, ou un produit de nombres premiers différents, le groupe est cyclique, mais cette condition suffisante n'est pas nécessaire.

Un corps, de discriminant premier ne contient qu'un idéal double de norme 1, qui engendre un cycle de type 1, évidemment principal. Ce cycle doit donc contenir un idéal semi réduit réfléchi, ce qui entraîne l'existence d'une décomposition du discriminant en une somme de carrés de deux nombres entiers.

C'est là une nouvelle preuve de la propriété déjà établie par la considération du corps $\mathbf{R}(i)$: *un nombre premier, congru à* $+1$, mod. 4; *est égal à une somme de carrés de deux nombres entiers* (**20**).

Cette démonstration établissait aussi la détermination de ces deux carrés; il est possible de le vérifier également par des considérations simples de congruences, dont le module est le nombre premier considéré. Cette précision montre qu'il ne peut y avoir d'autre idéal remarquable dans le corps, donc aucun autre cycle de type 1, 2, ou 3.

Le tableau XXI donne deux exemples de corps, de discriminants premiers, 317 et 193, dont la considération des idéaux réduits permet d'affirmer qu'ils sont principaux. Le tableau XXVIII indique comment ceci peut être établi par la considération des idéaux semi réduits; la disposition est la même que dans le tableau XXVII; mais dans chaque corps il n'y a qu'un seul cycle, dont les idéaux sont désignés par la lettre **I**: ils sont de trois termes dans le premier corps, de quinze termes dans le second.

Pour les discriminants peu élevés, on constate que, pour une très grande proportion d'entre eux, il n'y a pas de cycles de type 4, et que, par suite, le corps est principal. On indique ci-dessous la répartition des corps principaux de discriminant premier inférieur à 1000, suivant le nombre d'idéaux dans le cycle unique (les corps sont désignés par leurs discriminants):

1 idéal dans le cycle: 5, 13, 29, 53, 173, 293;
3 idéaux: 17, 37, 61, 101, 197, 317, 461, 557, 677, 773;
5 idéaux: 41, 149, 157, 181, 269, 397, 941;
7 idéaux: 89, 109, 113, 137, 373, 389, 509, 653, 797, 853, 997;
9 idéaux: 73, 97, 233, 277, 349, 353, 613, 821, 877;
11 idéaux: 541, 593, 661, 701, 857;
13 idéaux: 421, 757; 15 idéaux: 193, 281;
17 idéaux: 521, 617, 709; 19 idéaux: 241, 313, 449, 829, 953;
21 idéaux: 337, 569, 977; 23 idéaux: 433, 457, 641, 881;
25 idéaux: 929; 27 idéaux: 409;
29 idéaux: 673, 809; 31 idéaux: 937;
33 idéaux: 601; 35 idéaux: 769.

Les six corps, dont le cycle principal n'a qu'un seul idéal, sont indiqués dans le tableau XX (avec cinq autres, de discriminant non premier).

Les seuls corps, de discriminant premier, inférieur à 1000, qui ne sont pas principaux sont ceux de discriminants:

229, 257, 733, 761, qui comprennent chacun trois *cycles* (ou classes) formant par suite *un groupe cyclique d'ordre* 3;

401, qui comprend cinq *cycles*, formant *un groupe cyclique d'ordre* 5;

577, qui comprend sept *cycles*, formant *un groupe cyclique d'ordre* 7.

Le tableau XXVIII donne aussi les calculs des cycles pour trois de ces corps, de discriminants:

577: cycle **U** de trois idéaux; trois couples de cycles conjugués; **I**, **I**′ et **J**, **J**′ de chacun trois idéaux; **K**, **K**′ de chacun cinq idéaux;
401: cycle **U** de trois idéaux; deux couples de cycles conjugués; **I**, **I**′ de chacun trois idéaux; **J**, **J**′ de chacun cinq idéaux;
761: cycle **U** de cinq idéaux; deux cycles conjugués, **I**, **I**′ de chacun sept idéaux.

Pour des discriminants relativement élevés, le groupe de cycles (ou de classes) peut n'être pas cyclique. L'exemple de calcul de structure du tableau XXVII concerne un corps dont le discriminant, 62 501, est premier, et dont le groupe des cycles, d'ordre 9 est produit direct de deux groupes cycliques d'ordre 3.

53. Corps à une seule classe double.

Le corps, de caractère exceptionnel, défini par le polynôme fondamental:

$$F(x) = x^2 - 2; \qquad D = 8;$$

a un seul idéal semi réduit, à la fois double et réfléchi, qui est l'idéal unité. Il n'y a donc qu'un seul cycle, d'un seul terme, et le corps, comme ce cycle, est principal.

A l'exception de ce corps, et en plus de ceux dont le discriminant est un nombre premier, il existe des corps qui n'ont qu'une seule classe double (conjuguée d'elle-même); ce sont ceux dont le discriminant a au plus deux facteurs premiers impairs, congrus à —1, mod. 4. En tenant compte des conditions de construction d'un corps réel (**1**), on obtient l'énoncé suivant:

Un corps réel, dont le discriminant D est: