

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 7 (1961)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES CORPS QUADRATIQUES
Autor: Châtelet, A.
Kapitel: 48. Diviseurs de l'unité.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-37125>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 24.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

La dernière comparaison est une égalité, si non la comparaison de γ_{j+1} à la base des α entraînerait:

$$|\gamma'_{j+1}| < |\alpha'_{i+1}| \Rightarrow \gamma_{j+1} > \alpha_i = \gamma_j,$$

ce qui est contradictoire avec la définition de la base des γ .

L'égalité des valeurs absolues $|\gamma'_{j+1}| = |\alpha'_{i+1}|$ entraîne celle des conjugués $\gamma_{j+1} = \alpha_{i+1}$, puisqu'ils sont positifs.

Le théorème résulte aisément de cette propriété préalable: si un idéal $\mathbf{M} = (m, \theta - c)$, semi réduit, de racine finale c , est congru aux idéaux \mathbf{M}_i d'un cycle et notamment à \mathbf{M}_0 , dans lequel est construit une suite de bases $\alpha_i \alpha_{i+1}$, il existe un élément ρ , qui peut être choisi positif, tel que $(\rho) \times \mathbf{M}$ soit égal à \mathbf{M}_0 . Le couple d'éléments:

$$\gamma_j = \rho \times m \quad \gamma_{j+1} = \rho \times (\theta - c)$$

est une base arithmétique libre de \mathbf{M}_0 , qui vérifie les conditions précédentes et qui par suite est égale à une des bases de la suite:

$$\rho \times m = \alpha_i = \rho_i \times m_i \quad \rho \times (\theta - c) = \alpha_{i+1} = \rho_i (\times \theta - c_i).$$

Dans la dernière égalité, la comparaison des coefficients de θ montre que:

$$\rho = \rho_i, \quad m = m_i, \quad c = c_i, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_i.$$

Tout idéal \mathbf{M} , semi réduit, congru aux idéaux d'un cycle d'idéaux semi réduits est égal à un idéal de ce cycle.

48. Diviseurs de l'unité.

THÉORÈME des diviseurs de l'unité (II). — Dans un corps réel, pour chacun des cycles d'idéaux semi réduits, désignés par leurs racines finales:

$$\mathbf{M}_i = (m_i, \theta - c_i); \quad i \text{ de } 0 \text{ à } h-1;$$

les diviseurs de l'unité sont égaux aux produits par +1 et -1 des puissances ω^λ , (d'exposants λ entiers quelconques) de:

$$\omega = [\Pi(\theta - c_i)]:[\Pi m_i]; \quad i \text{ de } 0 \text{ à } h-1.$$

Cette expression a la même valeur pour tous les cycles du corps.

On a déjà indiqué (Théorème I des diviseurs de l'unité, 45) que les éléments $+\omega^\lambda$ et $-\omega^\lambda$ sont des diviseurs de l'unité. Réciproquement, les opposés de diviseurs de l'unité étant encore des diviseurs de l'unité, on peut se borner à chercher ceux qui sont positifs.

On considère un cycle, engendré par un idéal semi réduit $\mathbf{M}_0 = (m_0, \theta - c_0)$, dans lequel on a construit une suite de bases de termes positifs α_i . Le produit $\eta \times \mathbf{M}_0$, de cet idéal par un diviseur positif η , de l'unité, lui reste égal et les éléments positifs $\eta \times m_0$ et $\eta \times (\theta - c_0)$ en constituent une base arithmétique libre. Comme cette base vérifie les relations:

$$[\eta \times (\theta - c_0)] : (\eta \times m_0) = (\theta - c_0) : m_0 < 1; \\ [\eta' \times (\theta' - c_0)] : (\eta' \times m_0) = (\theta' - c_0) : m_0 < -1;$$

elle est égale à l'une des bases de la suite, de sorte que:

$$\eta \times (\theta - c_0) = \alpha_{i+1} = \rho_i \times (\theta - c_i);$$

ce qui entraîne:

$$\eta = \rho_i, \quad c_0 = c_i \Rightarrow i = \lambda h; \quad \eta = \omega^\lambda; \quad \lambda \text{ entier.}$$

La démonstration montre notamment que *la valeur de l'expression qui donne ω est indépendante du cycle utilisé*. On peut obtenir cette valeur par un calcul de multiplication, dans le corps quadratique (en utilisant la relation $\theta^2 = -S\theta + N$), notamment en cherchant de proche en proche les valeurs $\alpha_{i+1} = \alpha_i \times (\theta - c_i) : m_i$.

On peut aussi utiliser une relation linéaire qui existe entre trois termes successifs de la suite des α_i :

$$\alpha_{i+1} = \alpha_{i-1} - q_i \times \alpha_i; \quad q_i = (c_i + c_{i-1} - S) : m_i.$$

Cette égalité résulte de la construction des idéaux successifs du cycle: l'idéal $\mathbf{M}_i = (m_i, \theta - c_i)$ est le conjugué de l'associé de son précédent \mathbf{M}_{i-1} , de sorte que:

$$c_i + c_{i-1} \equiv S, \pmod{m_i}; \quad \text{ou} \quad c_i = S - c_{i-1} + q_i \times m_i;$$

q_i étant le nombre entier positif, indiqué plus haut.

En transportant cette valeur dans la relation de récurrence multiplicative des α_i , on obtient:

$$\alpha_{i+1} = [(\theta - c_i) : m_i] \times \alpha_i = [(\theta - S + c_{i-1}) : m_i] \times \alpha_i - q_i \times \alpha_i.$$

Mais le premier terme du second membre est égal à α_{i-1} , on le vérifie en exprimant α_i , par la relation de récurrence; le terme devient:

$$[(-\theta' + c_{i-1}) : m_i] \times [(\theta - c_{i-1}) : m_{i-1}] \times \alpha_{i-1}$$

et le facteur de α_{i-1} est égal à:

$$-[(\theta' - c_{i-1}) \times (\theta - c_{i-1})] : (m_i \times m_{i-1}) = [-F(c_{i-1})] : (m_i \times m_{i-1}) = 1$$

la dernière égalité résulte de l'association de \mathbf{M}_{i-1} et du conjugué de \mathbf{M}_i .

La relation de récurrence linéaire peut être mise sous forme matricielle. Les bases, disposées en colonnes (comme il a été fait ci-dessus; 9), vérifient l'égalité:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{i+1} \\ \alpha_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_i \\ \alpha_{i-1} \end{vmatrix}; \quad q_i = (c_{i-1} + c_i - S) : m_i.$$

Ceci appliqué à h bases consécutives (par exemple aux h premières) donne une propriété de ω :

$$\begin{vmatrix} \omega \times \alpha_1 \\ \omega \times \alpha_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{h+1} \\ \alpha_h \end{vmatrix} = \Pi \left(\begin{vmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) \times \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{vmatrix};$$

les matrices sont prises de $i = 1$ à $i = h$, mais disposées de *droite à gauche*. Toutes les matrices multipliées ayant un déterminant égal à -1 , la matrice produit a un déterminant égal à -1 ou à $+1$, suivant que h , nombre d'idéaux du cycle, est impair, ou pair. Ce produit est donc de la forme:

$$\Pi \left(\begin{vmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} U & V \\ V' & U' \end{vmatrix}; \quad U \times U' - V \times V' = \varepsilon (+1 \text{ ou } -1).$$

La relation obtenue entraîne:

$$\begin{vmatrix} \omega \times \alpha_1 \\ \omega \times \alpha_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U & V \\ V' & U' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{déterminant} \begin{vmatrix} U - \omega & V \\ V' & U' - \omega \end{vmatrix} = 0$$

Il en résulte que le diviseur de l'unité ω vérifie l'équation du second degré:

$$\omega^2 - (U + U') \times \omega + \varepsilon = 0;$$

et la norme $\omega \times \omega'$ est égale à ε ; sa valeur absolue est 1 et son signe est — ou +, suivant que h est impair ou pair.

Il en résulte que *tous les cycles*, d'un même corps quadratique, *ont la même parité du nombre de leurs idéaux*.

Les matrices multipliées étant symétriques (égales respectivement à leurs transposées), la transposée de leur produit est égale à leur produit, mais disposé dans l'ordre inverse:

$$\Pi \begin{vmatrix} -q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U & V' \\ V & U' \end{vmatrix}; \quad i \text{ de 1 à } h.$$

(On obtiendrait d'ailleurs ces produits en disposant les termes des bases en lignes.) L'équation en ω reste la même.

EXEMPLES. — On a indiqué ci-dessus (46) le calcul de ω dans le corps de discriminant 145, en utilisant la relation de récurrence (multiplicative) entre deux α_i successifs. L'emploi de la récurrence linéaire conduit aux calculs suivants (pour le même cycle):

$$\begin{array}{l|l|l|l} \mathbf{M}_0 = (1, \theta - 5) & \mathbf{M}_1 = (6, \theta - 0) & \mathbf{M}_2 = (6, \theta - 5) & \mathbf{M}_0 = (1, \theta - 5) \\ q_i = \dots \dots \dots & (5+0+1):6 = 1 & (0+5+1):6 = 1 & (5+5+1):1 = 11 \\ \alpha_0 = 1 & \alpha_1 = \theta - 5 & \alpha_2 = \alpha_0 - 1 \times \alpha_1 & \alpha_3 = \alpha_1 - 1 \times \alpha_2 \\ & & -\theta + 6 & 2\theta - 11 = \omega \end{array}$$

Le produit des matrices (i de 1 à 3, de gauche à droite) est:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -11 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -23 & 2 \\ 12 & -1 \end{vmatrix};$$

l'équation vérifiée par ω est:

$$\omega^2 + 24\omega - 1 = 0;$$

ce qu'on peut constater directement.

Le tableau XXV donne encore un exemple de calculs des idéaux semi réduits dans le corps de discriminant 377. Il y a 2 cycles de 4 et

de 6 idéaux. Il indique, pour le premier de ces cycles, le calcul des α_i et du diviseur de l'unité ω , par récurrence multiplicative et par récurrence linéaire, ainsi que le produit des substitutions linéaires (ou des matrices unimodulaires).

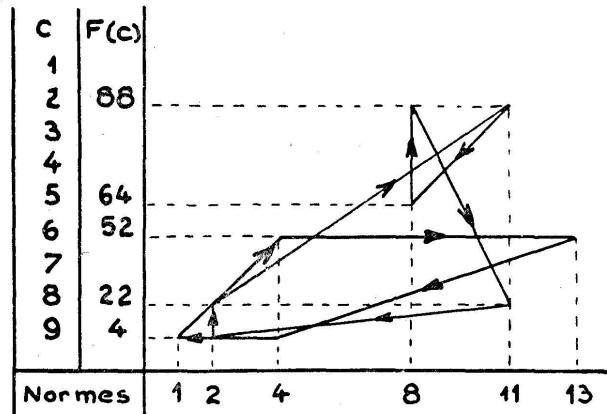
La norme de ω est $+1$, puisque les nombres d'idéaux de chaque cycle sont pairs.

TABLEAU XXV.

Exemples de calculs de cycles et de diviseurs de l'unité.

$$F(x) = x^2 + x - 94; \quad D = 377 = 13 \times 29$$

c	$\frac{2c}{S}$	$-F(c)$	Idéaux semi réduits
0	1	$94 = 2 \times 47$	
1	3	$92 = 2^2 \times 23$	
2	5	$88 = 2^3 \times 11$	$(8, 0-2) \times (11, 0-2)$
3	7	$82 = 2 \times 41$	
4	9	$74 = 2 \times 37$	
5	11	$64 = 2^6$	$(8, 0-5) \times (8, 0-5)$
6	13	$52 = 2^2 \times 13$	$(4, 0-6) \times (13, 0-6)$
7	15	$38 = 2 \times 19$	
8	17	$22 = 2 \times 11$	$(2, 0-8) \times (11, 0-8)$ $(2, 0-9) \times (2, 0-9)$
9	19	$4 = 2^2$	$(1, 0-9) \times (4, 0-9)$



$$(1, 0-9) \rightarrow (4, 0-6) \quad (2, 0-8) \rightarrow (11, 0-2) \rightarrow (8, 0-5) \\ \uparrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ (4, 0-9) \leftarrow (13, 0-6) \quad (2, 0-9) \leftarrow (11, 0-8) \leftarrow (8, 0-2)$$

Calcul des diviseurs de l'unité.

$$q_i = \dots \quad \alpha_0 = 1 \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{M}_0 = (1, 0-9) \\ \mathbf{M}_1 = (4, 0-6) \\ (9+6+1):4 = 4 \\ \alpha_1 = (0-9) \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \mathbf{M}_2 = (13, 0-6) \\ (6+5+1):13 = 1 \\ \alpha_1 \times (0-6):4 \\ \alpha_2 = \alpha_0 - 4\alpha_1 \\ -40+37 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \mathbf{M}_3 = (4, 0-9) \\ (6+9+1):4 = 4 \\ \alpha_2 \times (0-6):13 \\ \alpha_3 = \alpha_1 - 1 \times \alpha_2 \\ 50-46 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \mathbf{M}_0 = (1, 0-9) \\ (9+9+1):1 = 19 \\ \alpha_3 \times (0-9):4 \\ \alpha_3 = \alpha_2 - 4 \times \alpha_3 \\ -240+221 \end{array} \right|$$

$$\left\| \begin{array}{cc} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\| \times \left\| \begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\| \times \left\| \begin{array}{cc} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\| \times \left\| \begin{array}{cc} -19 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 461 & -24 \\ -96 & 5 \end{array} \right\|$$

$$\omega^2 - 466\omega + 1 = 0.$$