Les limites pour i infini des multiplicateurs ρ_i et des éléments α_i résultent de leur appartenance à des progressions géométriques. La raison ω, de ces progressions est le produit de quotients $(\theta—c_i):m_i$ (i de 0 à $h—1$) positifs et inférieurs à 1; elle est donc inférieure à 1, d'où les limites des termes des progressions.

La croissance des éléments α_i et de leurs conjugués α_i', et la comparaison (des signes) des éléments consécutifs, résulte de leur construction au moyen des bases de $\mathbf{M}_i$, qui sont semi réduits:

$$\alpha_{i+1}:\alpha_i = [\rho_i\times(\theta—c_i)]:[\rho_i\times m_i] = (\theta—c_i):m_i < 1,$$
$$\alpha_{i+1}':\alpha_i' = [\rho_i'\times(\theta'—c_i)]:[\rho_i'\times m_i] = (\theta'—c_i):m_i < —1.$$

47. Détermination des cycles.

La considération de la suite des bases de $\mathbf{M}_0$ permet d'établir que les cycles d'idéaux semi réduits représentent les classes *proprement.*

Théorème de la détermination des cycles. — Dans un corps réel, *chaque classe d'idéaux contient un et un seul cycle d'idéaux semi réduits.*

En définissant les idéaux (canoniques) réduits (**20**), pour un corps quadratique quelconque (réel ou imaginaire), il a été établi que toute classe d'idéaux contient au moins un idéal $\mathbf{M}_0$ réduit, qui, pour un corps réel, est, a fortiori, semi réduit (**40**). La classe renferme, par suite, le cycle des idéaux réduits $\mathbf{M}_i$, obtenus en formant les suivants successifs de $\mathbf{M}_0$, puisque ces idéaux sont congrus à $\mathbf{M}_0$.

Pour établir que le cycle ainsi construit est unique, on peut d'abord démontrer que:

dans un idéal $\mathbf{M}_0$ semi réduit, *pour qu'une base arithmétique libre*, de deux éléments positifs $\gamma_j > \gamma_{j+1}$, *appartienne à la suite des bases*, $\alpha_i\,\alpha_{i+1}$, associée au cycle d'idéaux semi réduits engendré par $\mathbf{M}_0$, *il faut et il suffit que*: ces termes et leurs conjugués vérifient les comparaisons:

$$\gamma_{j+1}:\gamma_j < 1; \qquad \gamma_{j+1}':\gamma_j' < —1;$$

la première résulte de l'ordre adopté pour numéroter les deux termes.

La condition est *nécessaire* puisqu'elle a été vérifiée ci-dessus pour la suite des bases α_i.

Pour démontrer qu'elle est *suffisante*, il peut être commode d'établir d'abord que pour un idéal qui a une base vérifiant ces conditions (même s'il n'est pas semi réduit):

tout élément non nul ξ, de cet idéal, dont la valeur absolue n'est égale ni à γ_j, ni à γ_{j+1}, *vérifie l'une*, au moins, des *comparaisons*:

$$|\xi| > \gamma_j > \gamma_{j+1}; \qquad \text{ou} \qquad |\xi'| > |\gamma'_{j+1}| > |\gamma'_j|.$$

Cet élément ξ peut être construit par additions et soustractions au moyen des termes de la base considérée, de sorte que:

$$\xi = x\gamma_j + y\gamma_{j+1}; \qquad \xi' = x\gamma'_j + y\gamma'_{j+1}; \qquad x, y \text{ nombres entiers.}$$

Il suffit alors d'examiner les divers cas, dépendant des signes et de la nullité des entiers x, y:

$$xy > 0\colon |\xi| = |x\gamma_j + y\gamma_{j+1}| = |x\gamma_j| + |y\gamma_{j+1}| > \gamma_j;$$
$$xy < 0\colon |\xi'| = |x\gamma'_j + y\gamma'_{j+1}| = |x\gamma'_j| + |y\gamma'_{j+1}| > |\gamma'_{j+1}|;$$
$$y = 0 \quad \text{et} \quad |x| \neq 1\colon |\xi| = |x\gamma_j| > \gamma_j;$$
$$x = 0 \quad \text{et} \quad |y| \neq 1\colon |\xi'| = |y\gamma'_{j+1}| > |\gamma'_{j+1}|.$$

On peut mettre la disjonction ainsi vérifiée sous la forme d'implications:

$$|\xi| < \gamma_j \quad \Rightarrow \quad |\xi'| \geqslant |\gamma'_{j+1}|;$$
$$|\xi'| < |\gamma'_{j+1}| \quad \Rightarrow \quad |\xi| \geqslant \gamma_j.$$

Ceci acquis, on compare, dans $\mathbf{M}_0$, à la suite des bases $\alpha_i\ \alpha_{i+1}$, une base $\gamma_j\ \gamma_{j+1}$ vérifiant la condition indiquée. La suite des α_i décroissant de $+\infty$ à $0, \gamma_j$ est situé dans l'un des intervalles, il existe i, tel que:

$$\alpha_i \geqslant \gamma_j > \alpha_{i+1}.$$

Il y a égalité, si non d'après la propriété précédente, appliquée à γ_j comparée à la base des α, puis à α_{i+1}, comparée à la base des γ:

$$\gamma_j < \alpha_i \quad \Rightarrow \quad |\gamma'_j| > |\alpha'_{i+1}| \quad \Rightarrow \quad \alpha_{i+1} > \gamma_j;$$

ce qui est contradictoire avec le choix de α_i.

On peut alors comparer α_{i+1} à la base $\gamma_j = \alpha_i$, γ_{j+1}; il en résulte:

$$\alpha_{i+1} < \alpha_i = \gamma_j \quad \Rightarrow \quad |\alpha'_{i+1}| \geqslant |\gamma'_{j+1}|.$$

La dernière comparaison est une égalité, si non la comparaison de γ_{j+1} à la base des α entrainerait:

$$|\gamma'_{j+1}| < |\alpha'_{i+1}| \quad \Rightarrow \quad \gamma_{j+1} > \alpha_i = \gamma_j,$$

ce qui est contradictoire avec la définition de la base des γ.

L'égalité des valeurs absolues $|\gamma'_{j+1}| = |\alpha'_{i+1}|$ entraîne celle des conjugués $\gamma_{j+1} = \alpha_{i+1}$, puisqu'ils sont positifs.

Le théorème résulte aisément de cette propriété préalable: si un idéal $\mathbf{M} = (m, \ \theta—c)$, semi réduit, de racine finale c, est congru aux idéaux $\mathbf{M}_i$ d'un cycle et notamment à $\mathbf{M}_0$, dans lequel est construit une suite de bases $\alpha_i \, \alpha_{i+1}$, il existe un élément ρ, qui peut être choisi positif, tel que $(\rho) \times \mathbf{M}$ soit égal à $\mathbf{M}_0$. Le couple d'éléments:

$$\gamma_j = \rho \times m \quad \gamma_{j+1} = \rho \times (\theta—c)$$

est une base arithmétique libre de $\mathbf{M}_0$, qui vérifie les conditions précédentes et qui par suite est égale à une des bases de la suite:

$$\rho \times m = \alpha_i = \rho_i \times m_i \quad \rho \times (\theta—c) = \alpha_{i+1} = \rho_i(\times \theta—c_i).$$

Dans la dernière égalité, la comparaison des coefficients de θ montre que:

$$\rho = \rho_i, \quad m = m_i, \quad c = c_i, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_i.$$

Tout idéal **M**, *semi réduit, congru aux idéaux d'un cycle d'idéaux semi réduits est égal à un idéal de ce cycle.*

48. Diviseurs de l'unité.

Théorème des diviseurs de l'unité (II). — Dans un corps réel, pour chacun des cycles d'idéaux semi réduits, désignés par leurs racines finales:

$$\mathbf{M}_i = (m_i, \ \theta—c_i); \qquad i \text{ de } 0 \text{ à } h—1;$$

les diviseurs de l'unité sont égaux aux produits par $+1$ *et* $—1$ *des puissances* ω^λ, (d'exposants λ entiers quelconques) *de*:

$$\omega = [\Pi(\theta—c_i)]:[\Pi m_i]; \qquad i \text{ de } 0 \text{ à } h—1.$$

Cette expression a la même valeur pour tous les cycles du corps.