Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 7 (1961)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES CORPS QUADRATIQUES

Autor: Châtelet, A.

Kapitel: 42. Construction des idéaux semi réduits.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-37125

42. Construction des idéaux semi réduits.

Pour obtenir tous les idéaux semi réduits d'un corps, *il suffit de construire les couples*, ou les produits, *d'idéaux associés relativement à leur racine finale.*

On utilise le tableau des valeurs négatives de $F(c)$, pour les valeurs entières de c, à partir de 0. Pour chaque valeur $|F(c)|$, on cherche celles de ses décompositions en produit $m \times n$, de deux entiers positifs, vérifiant la condition caractéristique, $|m—n|$ inférieur à $(2c—S)$; (ou la condition équivalente $(m+n)^2$ inférieur à D).

Chaque décomposition donne un des produits cherchés:

$$(m,\ \theta—c) \times (n,\ \theta—c) = (\theta—c).$$

Les idéaux ne sont ainsi obtenus qu'une fois, puisque c en est une racine déterminée (finale). Dans leurs expressions, on peut évidemment remplacer c par une racine congrue relativement à la norme.

Pour chaque produit ainsi obtenu, les idéaux respectivement conjugués, de mêmes normes m, n, sont semi réduits, associés relativement à la racine conjuguée $c' = S—c$, qui est leur racine initiale commune:

$$\mathbf{M}' = (m,\ \theta'—c) = (m,\ \theta—c'); \qquad \mathbf{N}' = (n,\ \theta'—c) = (n,\ \theta—c')$$

$$\mathbf{M}' \times \mathbf{N}' = (\theta'—c) = (\theta—c'); \qquad |F(c')| = |F(c)| = m \times n.$$

Ces idéaux conjugués sont les mêmes que les précédents; mais ils sont exprimés avec leurs racines initiales et leur répartition en produits, ou en couples, est différente de la répartition précédente.

Exemples. — Le tableau XXII donne des exemples de calcul, à la fois de *couples d'idéaux conjugués réduits*, et de produits d'*idéaux semi réduits associés à leur racine finale.* Pour faciliter les comparaisons, les idéaux ont été exprimés avec leur plus petite racine non négative.

Dans le corps, de discriminant 145, la majorante des racines minima des idéaux réduits est $r = 3$: le carré de $(2c—S)$ devient,

Tableau XXII.

Exemples de construction d'idéaux réduits et d'idéaux semi réduits.

$F(x) = x^2+x-36$; $D = +145 = 5\times 29$; $r = 3$

c	2 c −S	Idéaux réduits conjugués		Idéaux semi réduits
0	1	$-36 = -2^2\times 3^2$		
		(**1**, θ)		
		(**2**, θ)	(**2**, θ—1)	
		(**3**, θ)	(**3**, θ—2)	
		(**4**, θ)	(**4**, θ—3)	
		(**6**, θ)	(**6**, θ—5)	(**6**, θ) × (**6**, θ)
1	3	$-34 = -2\times 17$		
2	5	$-30 = -2\times 3\times 5$		
		(**5**, θ—2) = (**5**, θ—2)		(**5**, θ—2) × (6, θ—2)
3	7	$-24 = -2^3\times 3$		
				(**3**, θ) × (8, θ—3)
				(**4**, θ—3) × (6, θ—3)
4	9	$-16 = -2^4$		
				(**2**, θ) × (8, θ—4)
				(**4**, θ) × (**4**, θ)
5	11	$-6 = -2\times 3$		
				(**1**, θ) × (**6**, θ—5)
				(**2**, θ—1) × (**3**, θ—2)
6		+6		

$F(x) = x^2-58$; $D = +232 = 8\times 29$; $r = 4$

c	2 c −S	Idéaux réduits conjugués		Idéaux semi réduits
0	0	$-58 = -2\times 29$		
		(**1**, θ)		
		(**2**, θ) = (**2**, θ)		
1	2	$-57 = -3\times 19$		
		(**3**, θ—1)	(**3**, θ—2)	
2	4	$-54 = -2\times 3^3$		
		(**6**, θ—2)	(**6**, θ—4)	(**6**, θ—2) × (9, θ—2)
3	6	$-49 = -7^2$		
		(**7**, θ—3) ∼ (**7**, θ—4)		(**7**, θ—3) × (**7**, θ—3)
4	8	$-42 = -2\times 3\times 7$		
				(**6**, θ—4) × (**7**, θ—4)
5	10	$-33 = -3\times 11$		
				(**3**,θ—2) × (11,θ—5)
6	12	$-22 = -2\times 11$		
				(**2**, θ) × (11, θ—6)
7	14	$-9 = -3^2$		
				(**1**, θ) × (9, θ—7)
				(**3**, θ—1) × (**3**, θ—1)
8		+6		

(**1**, θ—5) → (**6**, θ) → (**6**, θ—5) → (**1**, θ—5)

(**3**, θ—3) → (8, θ—4) → (**2**, θ—5) → (**3**, θ—3)

(**5**, θ—2) → (6, θ—3) → (**4**, θ—4) → (**4**, θ—3) → (6, θ—2) → (**5**, θ—2)

(**3**, θ—5) → (**2**, θ—4) → (8, θ—3) → (**3**, θ—5)

(**1**, θ—7) → (9, θ—2) → (**6**, θ—4) → (**7**, θ—3) → (**7**, θ—4) → (**6**, θ—2) → (9, θ—7) → (**1**, θ—7)

(**2**, θ—6) → (11, θ—5) → (**3**, θ—7) → (**3**, θ—5) → (11, θ—6) → (**2**, θ—6) pour cette valeur, supérieur à $|F(c)|$. Il y a 6 couples d'idéaux réduits conjugués, mais ceux de normes 1 et 5 sont doubles, d'où seulement 10 idéaux réduits .En outre les idéaux du couple, de racine minimum 0 et de norme 6 sont réfléchis, donc congrus; il y a au plus 9 classes. Ces couples sont inscrits devant la racine minimum (non négative) de l'un de leurs termes, mais ils sont indiqués avec leur plus petite racine non négative.

Le tableau a été prolongé, jusqu'à la première valeur positive de $F(c)$; devant chacune de ses valeurs, on a inscrit d'autre part les produits d'idéaux semi réduits, calculés par les relations:

$$|F(c)| = m \times n; \ |m—n| < 2c—S; \ (m, \ \theta—c_1) \times (n, \ \theta—c_2)$$

c_1 et c_2 sont les plus petites valeurs, non négatives, congrues à c, relativement aux modules respectifs m et n. Il y a, ainsi, 8 produits d'idéaux semi réduits, mais pour deux d'entre eux, de racines finales 0 et 4, leurs termes sont égaux, et de normes 6 et 4. Il n'y a donc que 14 idéaux semi réduits différents, qui comprennent les 10 idéaux réduits précédents, dont les normes sont en caractères gras, et en outre 2 couples d'idéaux conjugués, de normes 6 et 8.

Dans le corps, de discriminant pair 232, la majorante des racines minima des idéaux réduits est $r = 4$. Il y a 5 couples d'idéaux réduits conjugués, dont deux idéaux doubles, de normes 1 et 2, en tout 8 idéaux réduits différents, dont 2 réfléchis, de norme 7 (au plus 7 classes).

Il y a d'autre part 7 produits d'idéaux associés semi réduits, dont 2 à termes égaux, de racines finales 3 et 7 et de normes 7 et 3. Il n'y a donc que 12 idéaux semi réduits différents, qui comprennent les 8 idéaux réduits précédents (dont les normes sont en caractères gras) et deux couples d'idéaux conjugués, de normes 9 et 11.

Le tableau XXIII donne, pour les mêmes exemples, la correspondance entre les produits d'idéaux semi réduits associés à leur racine finale c (non négative) et les produits conjugués associés à leur racine initiale $S—c$ (négative). Chacun de ses idéaux est encore désigné par sa plus petite racine non négative.

On peut résumer comme suit la définition, et la construction, au moyen du tableau de valeurs, de tout idéal semi réduit, de son associé (relativement à la racine finale) et de son conjugué.

TABLEAU XXIII.

Correspondance des produits conjugués d'idéaux semi réduits associes à leurs racines finale et initiale.

$F(x) = x^2+x-36$; $D = 145 = 5\times 29$

c_f finale	$(\theta-c_f)$	c_i initiale	$(\theta-c_i)$
0	$(\mathbf{6},\ \theta)\times(\mathbf{6},\ \theta)$	-1	$(\mathbf{6},\ \theta-5)\times(\mathbf{6},\ \theta-5)$
2	$(\mathbf{5},\ \theta-2)\times(6,\ \theta-2)$	-3	$(\mathbf{5},\ \theta-2)\times(6,\ \theta-3)$
3	$(\mathbf{3},\ \theta)\times(8,\ \theta-3)$ $(\mathbf{4},\ \theta-3)\times(6,\ \theta-3)$	-4	$(\mathbf{3},\ \theta-2)\times(8,\ \theta-4)$ $(\mathbf{4},\ \theta)\times(6,\ \theta-2)$
4	$(\mathbf{2},\ \theta)\times(8,\ \theta-4)$ $(\mathbf{4},\ \theta)\times(\mathbf{4},\ \theta)$	-5	$(\mathbf{2},\ \theta-1)\times(8,\ \theta-3)$ $(\mathbf{4},\ \theta-3)\times(\mathbf{4},\ \theta-3)$
5	$(\mathbf{1},\ \theta)\times(\mathbf{6},\ \theta-5)$ $(\mathbf{2},\ \theta-1)\times(\mathbf{3},\ \theta-2)$	-6	$(\mathbf{1},\ \theta)\times(\mathbf{6},\ \theta)$ $(\mathbf{2},\ \theta)\times(\mathbf{3},\ \theta)$

$F(x) = x^2-58$; $D = 232 = 8\times 29$

c_f finale	$(\theta-c_f)$	c_i initiale	$(\theta-c_i)$
0	»	0	»
1	»	-1	»
2	$(\mathbf{6},\ \theta-2)\times(9,\ \theta-2)$	-2	$(\mathbf{6},\ \theta-4)\times(9,\ \theta-7)$
3	$(\mathbf{7},\ \theta-3)\times(\mathbf{7},\ \theta-3)$	-3	$(\mathbf{7},\ \theta-4)\times(\mathbf{7},\ \theta-4)$
4	$(\mathbf{6},\ \theta-4)\times(\mathbf{7},\ \theta-4)$	-4	$(\mathbf{6},\ \theta-2)\times(\mathbf{7},\ \theta-3)$
5	$(\mathbf{3},\ \theta-2)\times(11,\ \theta-5)$	-5	$(\mathbf{3},\ \theta-1)\times(11,\ \theta-6)$
6	$(\mathbf{2},\ \theta)\times(11,\ \theta-6)$	-6	$(\mathbf{2},\ \theta-2)\times(11,\ \theta-5)$
7	$(\mathbf{1},\ \theta)\times(9,\ \theta-7)$ $(\mathbf{3},\ \theta-1)\times(\mathbf{3},\ \theta-1)$	-7	$(\mathbf{1},\ \theta)\times(9,\ \theta-2)$ $(\mathbf{3},\ \theta-2)\times(\mathbf{3},\ \theta-2)$

Un **idéal** (canonique) **semi réduit M**, de racine finale c, est caractérisé par:

$$\mathbf{M} = (m,\ \theta - c) = (m,\ \theta - c_1); \quad c_1 \equiv c, \quad (\text{mod. } m);$$
$$0 < 2c - S; \quad F(c) = -m \times n; \quad |m-n| < 2c - S [\text{ou } (m+n)^2 < D]$$

Son **idéal associé N** (relativement à sa racine finale c), qui est aussi semi réduit, est:

$$\mathbf{N} = (n,\ \theta - c) = (n,\ \theta - c_2); \quad c_2 \equiv c, \quad (\text{mod. } n).$$

Son **idéal conjugué M′**, qui est aussi semi réduit, de même norme et de racine finale c', est:

$$\mathbf{M}' = (m,\ \theta - c'); \quad c' \equiv S - c, \quad (\text{mod. } m);$$
$$F(c') < 0 < F(c'+m);$$

on peut évidemment remplacer la racine finale c' par tout entier c'_1, congru à c' (ou à $S-c$), mod. m.

43. Idéaux semi réduits remarquables.

Par analogie avec la notion des idéaux réduits remarquables dans un corps imaginaire (**29**), on peut donner les définitions suivantes.

Définitions. — Dans un corps quadratique réel, *parmi les idéaux semi réduits* (**42**), on peut **remarquer**, ou appeler **remarquables**:

1. un idéal qui est double (7) et qui est ainsi **semi réduit double**; il est égal à son conjugué.

2. un idéal qui est réfléchi, ou égal à son associé relativement à sa racine finale et qui est ainsi **semi réduit réfléchi** (puisque la différence des normes des idéaux associés qui est nulle est inférieure à $2c-S$, qui ne l'est pas).

Théorème d'existence d'un idéal semi réduit double. — Pour qu'un idéal soit *semi réduit double*, il faut et il suffit que *sa norme m soit un diviseur du discriminant D et vérifie les comparaisons*: