

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 7 (1961)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LES CORPS QUADRATIQUES  
**Autor:** Châtelet, A.  
**Kapitel:** 40. Idéaux semi réduits.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-37125>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

**40. Idéaux semi réduits.**

Pour « étendre » la définition des idéaux réduits, on peut d'abord déduire de la propriété caractéristique, établie ci-dessus (38), une remarque complémentaire.

Dans un corps réel, un idéal réduit  $\mathbf{M} = (m, \theta - \bar{c})$  a, au moins, deux racines distinctes, qui donnent à  $F(x)$  des valeurs négatives.

Pour l'idéal réduit  $\mathbf{M}$ , de racine minimum  $\bar{c}$ , la somme :

$$F(\bar{c} + m) + F(\bar{c} - m) = 2[F(\bar{c}) + m^2]$$

n'est pas positive, puisque  $F(\bar{c})$  est négative et  $m^2$  au plus égal à  $|F(\bar{c})|$ . Il en résulte que l'une au moins des valeurs  $F(\bar{c} + m)$ , et  $F(\bar{c} - m)$ , qui ne peuvent être nulles, est négative, en même temps que  $F(\bar{c})$ . Comme  $\bar{c} + m$  et  $\bar{c} - m$  sont différents de  $\bar{c}$ , la propriété est établie.

Ceci suggère la définition suivante: DÉFINITION. — Dans un corps quadratique réel, un idéal canonique est **semi réduit**, lorsqu'il a, au moins, deux racines distinctes, qui donnent des valeurs négatives à  $F(x)$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = (m, \theta - c_1) = (m, \theta - c_2); \quad c_1 - c_2 \equiv 0, \quad (\text{mod. } m); \\ c_1 \neq c_2; \quad F(c_1) < 0, \quad F(c_2) < 0. \end{aligned}$$

En particulier, un idéal réduit est, a fortiori, semi réduit. L'idéal  $\mathbf{M}'$ , conjugué, d'un idéal  $\mathbf{M}$  semi réduit, est aussi semi réduit, car les racines  $S - c_1$  et  $S - c_2$ , de l'idéal  $\mathbf{M}'$ , donnent à  $F(x)$ , les mêmes valeurs négatives, que les racines  $c_1$  et  $c_2$ , de  $\mathbf{M}$ .

Pour un idéal semi réduit, il y a ainsi plusieurs (2 ou plus) termes successifs de la progression arithmétique des racines qui donnent une valeur négative à  $F(x)$ ; ils comprennent la racine minimum  $\bar{c}$ ; ils sont en nombre fini [contenus entre les zéros irrationnels, négatif et positif, de  $F(x)$ ]; et ils ont deux termes extrêmes. Ceci suggère la définition générale suivante.

DÉFINITION. — Dans un corps quadratique réel, on appelle **racine initiale** et **racine finale**, d'un idéal canonique  $\mathbf{M}$ , la plus

*petite* (ou la première) et la *plus grande* (ou la dernière) des racines, s'il en existe, qui donnent une valeur négative au polynôme fondamental  $F(x)$ .

Elles sont caractérisées par l'équivalence de conditions:

$$F(c) < 0 \Leftrightarrow \{c_i \text{ initiale} \leq c \leq c_f \text{ finale}\};$$

ce qui est équivalent à la proposition contraposée ( $F(c)$  ne pouvant être nul):

$$F(c) > 0 \Leftrightarrow \{c < c_i \text{ initiale, ou } c > c_f \text{ finale}\}$$

Les racines initiale et finale de l'idéal  $\mathbf{M}'$ , conjugué d'un idéal  $\mathbf{M}$ , sont respectivement les racines conjuguées:

$$c'_i = S - c_f, \quad c'_f = S - c_i,$$

des racines finale et initiale de  $\mathbf{M}$ .

Pour un idéal semi réduit, les racines initiale et finale existent et sont distinctes. En outre le nombre entier  $(2c - S)$  est

$$\textit{positif}, \text{ pour la racine finale: } 2c_f - S > 0;$$

$$\textit{négatif}, \text{ pour la racine initiale: } 2c_i - S < 0;$$

(il n'est pas nul).

La différence  $c_f - c_i$  est positive et multiple de  $m$ , en sorte que  $c_f - m \geq c_i$  et  $c_i + m \leq c_f$  donnent des valeurs négatives à  $F(x)$ . Il en est de même des racines conjuguées:

$$F(S - [c_f - m]) = F(c_f - m) < 0; \quad F(S - [c_i + m]) = F(c_i + m) < 0.$$

Donc  $S - c_f + m$  et  $S - c_i - m$  sont, tous deux, inférieurs à  $c_f + m$  et supérieurs à  $c_i - m$  (qui donnent des valeurs positives à  $F(x)$ ). Il en résulte:

$$S - c_f + m < c_f + m \Leftrightarrow 2c_f - S > 0;$$

$$S - c_i - m > c_i + m \Leftrightarrow 2c_i - S < 0.$$

#### 41. Couple d'idéaux associés semi réduits.

Les idéaux semi réduits se présentent par couples d'idéaux associés relativement à une racine (26), aussi bien initiale que finale. Pour les idéaux d'un tel couple on peut en effet donner