CHAPITRE VI

LES CLASSES D'IDÉAUX ET LES DIVISEURS DE L'UNITÉ DANS LES CORPS RÉELS

Dans un corps réel, ou de discriminant positif, la considération des idéaux réduits (**25**) suffit pour montrer que le nombre de classes d'idéaux est fini. Mais elle ne permet plus de déterminer toujours, avec certitude, la structure de leur groupe (ou la table de PYTHAGORE de leur multiplication). On définit alors une catégorie plus étendue d'idéaux, qui sont appelés *semi réduits.* Chaque classe d'idéaux est caractérisée par un système, ou, plus précisément, par un *cycle* (système ordonné) d'*un nombre fini d'idéaux semi réduits.* Ces cycles permettent, en même temps, de réaliser la construction, au moins théorique, des *diviseurs de l'unité*, dans le corps réel considéré.

Avant d'exposer cette notion nouvelle, on montre d'abord comment dans certains cas, notamment pour des discriminants peu élevés, le calcul des seuls idéaux réduits permet encore d'aboutir à une affirmation.

38. Corps réels principaux triviaux.

Dans un corps réel, la valeur $F(c)$, du polynôme fondamental est négative, pour un nombre fini de valeurs entières, comprises entre les deux zéros (irrationnels) du polynôme, qui sont de signes contraires. La considération de ces valeurs fournit un criterium, moins strict, pour la détermination des idéaux réduits.

On peut d'abord modifier une remarque faite pour les idéaux des corps imaginaires (**29**): pour un idéal canonique d'un *corps réel, s'il existe des racines c qui rendent $F(x)$ négatif, la racine minimum $\bar{c}$ est celle, d'entre elles, qui donne à $F(x)$ la plus grande valeur absolue.*

Il suffit encore de considérer la différence:

$$F(\bar{c}+\lambda m)—F(\bar{c}) = \lambda m \times (2\bar{c}—S+\lambda m); \qquad \lambda \text{ entier rationnel};$$

si $\bar{c}$ est racine minimum, $|2\bar{c}—S|$ est au plus égal à m, $(2\bar{c}—S+\lambda m)$ est nul, ou du signe de λ, supposé non nul; la différence est positive ou nulle. S'il existe des racines $x = \bar{c}+\lambda m$ qui rendent $F(x)$ négative il en est de même de $\bar{c}$, puisque $F(\bar{c})$ est au plus égal à $F(\bar{c}+\lambda m)$ et il en résulte la comparaison des valeurs absolues:

$$F(\bar{c}) \leqslant F(\bar{c}+\lambda m) \quad \Rightarrow \quad |F(\bar{c})| \geqslant |F(\bar{c}+\lambda m)|.$$

Théorème caractéristique d'un idéal réduit. — *Dans un corps réel*, ou de discriminant positif, *pour qu'un idéal*, et, par suite, son idéal conjugué, soit réduit, *il faut et il suffit qu'il ait au moins une racine c, telle que $F(c)$ soit négative* et que le carré de sa norme soit au plus égal à la valeur absolue $|F(c)|$:

$$m \text{ diviseur de } |F(c)|; \qquad F(c) < 0; \qquad m^2 \leqslant |F(c)|.$$

La condition est *nécessaire*, car pour un idéal réduit, ces conditions sont vérifiées en prenant pour c la racine minimum $\bar{c}$ (**25**).

La condition est *suffisante*, la racine minimum de l'idéal est alors l'entier $\bar{c}$, de plus petite valeur absolue, congru à c, mod. m. Il donne encore une valeur négative à $F(x)$, au plus égale à $F(c)$ en sorte que:

$$m^2 \leqslant |F(c)| \leqslant |F(\bar{c})|;$$

ce qui vérifie la condition de réduction.

On peut encore vérifier que la définition d'un *idéal double* et sa propriété caractéristique (**7**) sont valables: sa norme est diviseur du discriminant. Mais la condition de *réduction* donnée pour les corps imaginaires (**29**) devient (coefficient 3 remplacé par 5):

$$5m^2 \leqslant D, \quad \begin{cases} \text{si } D \text{ est impair;} \\ \text{si } D = 4d; \quad d \text{ impair}; \quad m = 2u', \quad u' \text{ diviseur} \\ \qquad \text{de } d; \end{cases}$$

$$4m^2 \leqslant D, \quad \text{si } D = 4d, \quad m \text{ diviseur de } d.$$

Les idéaux réduits ne représentent plus proprement les classes d'idéaux; dans chacune d'elles, il peut exister plusieurs idéaux réduits, toutefois en nombre fini. Pour rechercher leur table de multiplication, comme il a été fait pour les corps imaginaires, il faudrait, au moins en principe, avoir préalablement réparti en classes les idéaux réduits eux-mêmes.

On peut cependant affirmer directement le résultat lorsque les calculs de multiplication des idéaux et les relations résultant des décompositions de valeurs du tableau permettent de constater que tous les idéaux réduits sont principaux, c'est-à-dire que *le corps est principal.*

Tableau XX.

Corps réels où le seul idéal réduit est (1).

$D =$ $r =$	5 1	13 1	$21 = 3\times 7$ 1	29 1	53 2	$77 = 7\times 11$ 2	173 3	293 4	$437 = 19\times 23$ 5		8 1	12 1
$-F(0)$	1	3	5	7	13	19	43	73	109		2	3
$-F(1)$	—1	1	3	5	11	17	41	71	107		1	2
$-F(2)$					7	13	37	67	103			
$-F(3)$							31	61	97			
$-F(4)$								53	89			
$-F(5)$									79			

Une première circonstance, presque *triviale*, pour laquelle cette affirmation est possible est réalisée lorsque l'idéal unité est le seul qui soit réduit:

pour qu'un corps réel soit principal, il suffit que les r *premières valeurs du polynôme fondamental $F(c)$:*

$$0 \leqslant c < r; \qquad x \geqslant r \quad \Leftrightarrow \quad |F(x)| < (2x-S)^2$$

qui sont négatives, *soient toutes des nombres premiers.*

Dans le cas des corps imaginaires, cette condition est aussi suffisante, mais elle est également nécessaire (**34**).

Pour les *discriminants pairs*, elle n'est vérifiée que pour les valeurs 8 et 12 (polynômes fondamentaux x^2—2 et x^2—3); pour tous les autres, l'idéal, de norme 2 et de racine 0 ou 1 est réduit.

Elle est, d'autre part, vérifiée pour 9 corps, de *discriminants impairs* (et aucun autre inférieur à 1000), qui sont donnés dans le tableau XX. On remarquera que dans ceux de discriminants 21 et 77, il y a un idéal double, non réduit.

39. Exemples de vérification de corps principaux.

Dans certains cas, la considération des idéaux réduits suffit encore à constater que le corps est principal. Quelques exemples de calcul en sont donnés dans le tableau XXI, qui est disposé de la même façon que les tableaux X, XII, XVI, donnés en exemples de corps imaginaires. On a toutefois inscrits, en caractères gras, les normes des idéaux réduits.

Une première circonstance est l'*existence d'un seul couple d'idéaux réduits conjugués* (en plus de l'idéal unité), éventuellement égaux, *dont la décomposition d'une valeur ultérieure du tableau montre qu'ils sont principaux.*

Dans le corps, de discriminant 317 (première colonne du tableau XXI) les 3 seuls idéaux réduits sont l'idéal (1) et le couple d'idéaux conjugués (inégaux), de norme 7. La valeur $F(8) = -7$, montre qu'ils sont principaux $(\theta-8) = (7, \theta-8)$. La valeur antérieure $F(5) = -49$ montre aussi qu'ils sont congrus (idéal réfléchi, non réduit).

Pour le corps de discriminant pair $152 = 8 \times 19$ (deuxième colonne du même tableau), les 2 seuls idéaux réduits sont (1) et l'idéal double de norme 2. La valeur $F(6) = -2$ montre que cet idéal est principal.

De telles vérifications peuvent se faire pour un assez grand nombre de corps de discriminants inférieurs à 1000, notamment:

impairs: 17, 33, 37, 41, 61, 69, 93, 101, 133, 149, 157, 197, 213, 237, 269, 317, 341, 413, 453, 461, 557, 677, 717, 773, 941;

pairs: 24, 28, 44, 56, 92, 152, 188, 248, 332, 668, 908.