Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 7 (1961)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES CORPS QUADRATIQUES

Autor: Châtelet, A.

Kapitel: 37. Corps imaginaires, dont le discriminant a plus de deux facteurs premiers.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-37125

congru à $\mathbf{I}^{18}$. Les expressions des autres idéaux réduits dont les normes sont composées avec ces nombres premiers s'obtiennent par multiplication.

Comme dans le cas d'un discriminant premier, il semble que ce soit seulement pour des valeurs relativement grandes de $|D|$ qu'il soit possible d'obtenir des groupes de classes non cycliques. Un exemple en est donné dans le tableau XVII, disposé comme le tableau XIV, qui concerne le corps de discriminant —19 451 = (—43)×437.

Il a dix-huit classes d'idéaux, dont une classe double représentée par l'idéal réduit double de norme 43. Leur groupe n'est pas cyclique: il a une *décomposition minimum* en un produit direct de sous-groupes cycliques d'ordres 3 et 6 et ses éléments peuvent être représentés par les monômes (indiqués dans le tableau):

$$\mathbf{I}^x \times \mathbf{J}^y; \quad x, \quad \text{mod. } 3; \quad y, \quad \text{mod. } 6.$$

La vérification peut être faite comme suit: la décomposition de $F(0) = 17^3$ montre que les idéaux de norme 17, forment avec (1), un *sous-groupe cyclique*, d'ordre 3. La décomposition de $F(21) = 5^3 \times 43$ montre que les idéaux, de normes 5 et 25 ont leur troisième puissance congru à l'idéal double, de norme 7; ils définissent, par suite, avec cet idéal et (1), un *sous-groupe de six classes*, *cyclique*, indépendant du précédent (dont il ne contient pas d'élément, sauf (1)). Le groupe est donc égal au produit direct de ces deux sous-groupes; il n'a aucun élément d'ordre 18 et il n'est pas cyclique.

On peut préciser sa structure en calculant les idéaux réduits congrus aux divers monômes en **I** et **J**; c'est ce qui a été indiqué dans le tableau; la première congruence résulte d'un calcul de multiplication d'idéaux canoniques, de normes premières entre elles, obtenus successivement:

$$\mathbf{I}\times\mathbf{J}; \quad \mathbf{I}\times(\mathbf{I}\times\mathbf{J}); \quad \mathbf{I}\times(\mathbf{I}\times\mathbf{J}^2); \quad \mathbf{I}\times(\mathbf{I}\times\mathbf{J}^3); \quad \mathbf{I}\times\mathbf{J}'.$$

37. Corps imaginaires, dont le discriminant a plus de deux facteurs premiers.

Le discriminant est alors décomposable, au moins de deux façons, en un produit de deux facteurs. Il en résulte l'existence

TABLEAU XVII.

$$F(x) = x^2+x+4\,913;\quad D = -19\,651 = (-43)\times 437;\quad r = 40.$$

(Groupe d'ordre 3 × *Groupe d'ordre 6).*

0	$4\,913 = 17^3$ $(\mathbf{1},\ \theta-0) \sim \mathbf{I}^3 \sim \mathbf{J}^6$ $(\mathbf{17},\ \theta-0) \sim \mathbf{I}$
1	$4\,915 = 5\times 983$ $(\mathbf{5},\ \theta-1) = \mathbf{J}$
2	$4\,919$
3	$4\,925 = 5^2\times 197$ $(\mathbf{25},\ \theta-3) \sim \mathbf{J}^4$
4	$4\,933$
5	$4\,943$
6	$4\,955 = 5\times 991$
7	$4\,969$
8	$4\,985 = 5\times 997$
9	$5\,003$
10	$5\,023$
11	$5\,045 = 5\times 1\,009$
12	$5\,069 = 37\times 137$ $(\mathbf{37},\ \theta-12) \sim \mathbf{I}\times\mathbf{J}^3$
13	$5\,095 = 5\times 1\,019$
14	$5\,123 = 47\times 109$ $(\mathbf{47},\ \theta-14) \sim \mathbf{I}\times\mathbf{J}^2$
15	$5\,153$
16	$5\,185 = (5\times 17)\times \mathbf{61}$ $(\mathbf{61},\ \theta-16) \sim \mathbf{I}\times\mathbf{J}^5$
17	$5\,219 = 17\times 307$
18	$5\,255 = 5\times 1\,051$

19	$5\,293 = 67\times 79$ $(\mathbf{67},\ \theta-19) \sim \mathbf{I}^2\times\mathbf{J}^2$
20	$5\,333$
21	$5\,375 = 5^3\times \mathbf{43}$ $(\mathbf{43},\ \theta-21) \sim \mathbf{J}^3$
22	$5\,419$
23	$5\,465 = 5\times 1\,093$
24	$5\,513 = 37\times 149$
25	$5\,563$
26	$5\,615 = 5\times 1\,123$
27	$5\,669$
28	$5\,725 = 5^2\times 229$
29	$5\,783$
30	$5\,843$
31	$5\,905 = 5\times 1\,181$
32	$5\,969 = 67\times 127$
33	$6\,035 = (5\times 17)\times \mathbf{71}$ $(\mathbf{71},\ \theta-33) \sim \mathbf{I}\times\mathbf{J}$
34	$6\,103 = 17\times 359$
35	$6\,173$
36	$6\,245 = 5\times 1\,249$
37	$6\,319 = 71\times 89$
38	$6\,395 = 5\times 1\,279$
39	$6\,473$

$F(61) = 8\,695 = (5\times 47)\times \mathbf{37}$
$F(86) = 12\,395 = (5\times 37)\times \mathbf{67}$
$F(108) = 16\,685 = (5\times 71)\times \mathbf{47}$

$\mathbf{I}\times\mathbf{J} \sim (5\times 17,\ \theta+34) \sim (\mathbf{71},\ \theta-33)$
$\mathbf{I}\times\mathbf{J}^2 \sim (5\times 71,\ \theta-108) \sim (\mathbf{47},\ \theta-14)$
$\mathbf{I}\times\mathbf{J}^3 \sim (5\times 47,\ \theta-61) \sim (\mathbf{37},\ \theta-12)$
$\mathbf{I}\times\mathbf{J}^4 \sim (5\times 37,\ \theta-86) \sim (\mathbf{67},\ \theta+20)$
$\mathbf{I}\times\mathbf{J}^5 \sim (5\times 17,\ \theta+17) \sim (\mathbf{61},\ \theta-16)$

d'au moins deux idéaux réduits remarquables, en plus de l'idéal unité. Le groupe des classes, qui contient au moins deux éléments d'ordre 2, n'est pas cyclique.

Le tableau XVIII, disposé comme les tableaux XII et XV, donne trois exemples de tels corps. Pour le *premier*, de discriminant $-420 = -4 \times 3 \times 5 \times 7$, il y a six idéaux réduits doubles, de normes 2, 3, 5, 7, 10 et un idéal réduit réfléchi, de norme 11 (résultant de la décomposition $420 = 20 \times 21$). Il y a en tout sept classes, chacune d'ordre 2 dans le groupe, qui, avec la classe principale, constituent un groupe d'ordre 8, produit direct de trois groupes cycliques d'ordre 2.

Pour le *deuxième exemple*, de discriminant $-435 = -3 \times 5 \times 29$, il y a deux idéaux réduits doubles, de normes 3 et 5 et un idéal réduit réfléchi, de norme 11 (résultant de la décomposition $435 = 15 \times 29$). Il y a en tout trois classes, chacune d'ordre 2, qui, avec la classe principale, constituent un groupe, d'ordre 4, produit direct de deux groupes cycliques d'ordre 2 (groupe de Klein).

Pour le *troisième exemple*, de discriminant $-440 = -8 \times 5 \times 11$, il n'y a pas d'idéal réduit réfléchi, mais seulement trois idéaux réduits doubles, de normes 2, 5, 10, et, en outre quatre couples d'idéaux réduits conjugués, de normes 3, 6, 7, 9. Il y a en tout, $3+2 \times 4 = 11$ classes, qui, avec la classe principale, constituent un groupe, d'ordre 12, produit direct de deux groupes cycliques, d'ordre 6 et 2.

Le tableau XIX donne encore la répartition des corps imaginaires dont le discriminant est de valeur absolue inférieure à 1000, et contient au moins trois facteurs premiers, d'après la structure du groupe de leurs classes d'idéaux. On a distingué les discriminants impairs et les discriminants qui ont un facteur 4 ou 8.

Le discriminant de trois seulement de ces corps contient quatre facteurs: le groupe des classes d'idéaux de chacun de ces corps est le produit direct de deux groupes cycliques d'ordre 2. Pour tous les autres corps, le groupe des classes d'idéaux est le produit direct de deux groupes cycliques.

En généralisant la construction des exemples précédents, on peut aisément vérifier que, pour un corps imaginaire, dont *le discriminant a n facteurs premiers*, différents, le groupe des

TABLEAU XVIII.

Exemples de corps imaginaires dont le discriminant a au moins 3 facteurs premiers.

$D = -420;\ r = 6$	
c	
0	$105 = 3 \times 5 \times 7$ $(\mathbf{1}, \theta - 0) = (1)$ $(\mathbf{3}, \theta - 0) = \mathbf{J}$ $(\mathbf{5}, \theta - 0) \sim \mathbf{I} \times \mathbf{K}$ $(\mathbf{7}, \theta - 0) = \mathbf{K}$
1	$106 = 2 \times 53$ $(\mathbf{2}, \theta - 1) = \mathbf{I}$
2	109
3	$114 = 2 \times 3 \times 19$ $(\mathbf{6}, \theta - 3) \sim \mathbf{I} \times \mathbf{J}$
4	$121 = 11^2$ $(\mathbf{11}, \theta - 4) \sim \mathbf{I} \times \mathbf{K}$
5	$130 = 2 \times 5 \times 13$ $(\mathbf{10}, \theta - 5) \sim \mathbf{I} \times \mathbf{J} \times \mathbf{K}$
7	$154 = 2 \times 7 \times 11$

$(\mathbf{3}, \theta) \times (\mathbf{5}, \theta) \times (\mathbf{7}, \theta) \sim (1) \quad [F(0)]$

$(\mathbf{2}, \theta - 1) \times (\mathbf{7}, \theta) \times (\mathbf{11}, \theta + 4) \sim (1) \quad [F(7)]$

3 groupes cycliques d'ordre 2

$\mathbf{I}^x \times \mathbf{J}^y \times \mathbf{K}^z$

x, y, z, mod. 2

$D = -435;\ r = 6$	
c	
0	109 $(\mathbf{1}, \theta - 0) = (1)$
1	$111 = 3 \times 37$ $(\mathbf{3}, \theta - 1) = \mathbf{I}$
2	$115 = 5 \times 23$ $(\mathbf{5}, \theta - 2) = \mathbf{J}$
3	$121 = 11^2$ $(\mathbf{11}, \theta - 3) \sim \mathbf{I} \times \mathbf{J}$
4	$129 = 3 \times 43$
5	139
7	$165 = 3 \times 5 \times 11$

$(\mathbf{3}, \theta - 1) \times (\mathbf{5}, \theta - 2) \times (\mathbf{11}, \theta - 7) \sim (1) \quad [F(7)]$

2 groupes cycliques d'ordre 2

$\mathbf{I}^y \times \mathbf{J}^z$

x, y, mod. 2

$D = -440;\ r = 7$	
c	
-4	$(\mathbf{9}, \theta + 4) \sim \mathbf{I}^4$
-3	$(\mathbf{7}, \theta + 3) \sim \mathbf{I}^4 \times \mathbf{J}$
-2	$(\mathbf{6}, \theta + 2) \sim \mathbf{I} \times \mathbf{J}$
-1	$(\mathbf{3}, \theta + 1) \sim \mathbf{I}^5$
0	$110 = 2 \times 5 \times 11$ $(\mathbf{1}, \theta - 0) = (1)$ $(\mathbf{2}, \theta - 0) = \mathbf{J}$ $(\mathbf{5}, \theta - 0) \sim \mathbf{I}^3$ $(\mathbf{10}, \theta - 0) \sim \mathbf{I}^3 \times \mathbf{J}$
1	$111 = 3 \times 37$ $(\mathbf{3}, \theta - 1) = \mathbf{I}$
2	$114 = 2 \times 3 \times 19$ $(\mathbf{6}, \theta - 2) \sim \mathbf{I}^5 \times \mathbf{J}$
3	$119 = 7 \times 17$ $(\mathbf{7}, \theta - 3) \sim \mathbf{I}^2 \times \mathbf{J}$
4	$126 = 2 \times 3^2 \times 7$ $(\mathbf{9}, \theta - 4) \sim \mathbf{I}^2$
5	$135 = 3^3 \times 5$
6	$146 = 2 \times 7^3$

2 groupes cycliques d'ordres 6 et 2

$\mathbf{I}^x \times \mathbf{J}^y$

x, mod. 6; y, mod. 2

classes d'idéaux est le *produit direct d'au moins n—1 groupes cycliques*.

C'est ainsi que, pour le corps de discriminant:

$$-5\,450 = -4\times3\times5\times7\times13,$$

il y a quinze classes, chacune d'ordre 2 dans le groupe, qui est le produit direct de quatre groupes cycliques, d'ordre 2.

TABLEAU XIX.

Répartition, d'après la structure du groupe des classes, des corps quadratiques imaginaires dont le dicriminant a au moins 3 facteurs premiers.

Produit de deux groupes cycliques d'ordre 2 (groupe de KLEIN):

$|D|$ impair: $3\times5\times13$; $3\times5\times29$; $3\times7\times23$; $3\times5\times37$; $5\times7\times17$; $3\times11\times19$; $5\times11\times13$; $3\times5\times13$;

$|D|$ multiple de 4: $4\times3\times7$; $4\times3\times11$; $4\times3\times19$; $4\times5\times17$; $4\times3\times31$; $4\times7\times19$; $4\times3\times59$;

$|D|$ multiple de 8: $8\times3\times5$; $8\times3\times7$; $8\times5\times7$; $8\times3\times13$; $8\times3\times17$ $8\times5\times13$; $8\times5\times19$;

Produit direct de deux groupes cycliques d'ordres 2 et 4:

$|D|$ impair: $3\times7\times31$; $3\times5\times61$; $3\times7\times47$;

$|D|$ multiple de 4: $4\times5\times13$; $4\times3\times23$; $4\times7\times11$; $4\times3\times47$; $4\times5\times29$; $4\times5\times41$; $4\times3\times71$; $4\times7\times31$;

$|D|$ multiple de 8: $8\times3\times11$; $8\times3\times19$; $8\times3\times23$; $8\times7\times11$; $8\times5\times19$;

Produit direct de deux groupes cycliques d'ordres 2 et 6:

$|D|$ impair: $3\times7\times11$; $3\times5\times17$;

$|D|$ multiple de 4: $4\times3\times43$; $4\times3\times67$; $4\times3\times79$; $4\times3\times83$;

$|D|$ multiple de 8: $8\times5\times11$; $8\times5\times17$; $8\times3\times29$; $8\times3\times31$; $8\times3\times37$; $8\times3\times41$;

Produit direct de deux groupes cycliques d'ordres 2 et 8:

$|D|$ impair: $3\times7\times19$; $3\times13\times17$; $3\times7\times43$;

$|D|$ multiple de 4: $4\times7\times23$; $4\times5\times37$; $4\times13\times17$;

Produit direct de deux groupes cycliques d'ordres 2 et 10:

$|D|$ impair: $5\times7\times13$; $3\times5\times41$;

$|D|$ multiple de 4: $4\times11\times19$;

$|D|$ multiple de 8: $8\times5\times23$;

Produit direct de deux groupes cycliques d'ordres 2 et 12:

$|D|$ impair: $3\times11\times23$;

Produit direct de deux groupes cycliques d'ordres 2 et 14:

$|D|$ impair: $5\times11\times17$;

Produit direct de trois groupes cycliques d'ordre 2:

$|D|$ multiple de 4: $4\times3\times5\times7$; $4\times3\times5\times11$;

$|D|$ multiple de 8: $8\times3\times5\times7$.