Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 7 (1961)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES CORPS QUADRATIQUES
Autor: Châtelet, A.
Kapitel: 32. Répartition des idéaux dans les classes.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-37125

Dans tout autre cas, les deux idéaux réduits sont distincts et définissent *deux classes conjuguées.*

Les classes ainsi engendrées sont différentes et *ce sont toutes les classes du corps.*

Exemples. — Le tableau IX indique les calculs pour le corps de discriminant —231; le rang est $r = 4$. Pour c compris entre 0 et 3 inclus, on a inscrit les décompositions $F(c) = m \times n$, en deux facteurs au moins égaux à $2c+1$ et devant chacune l'idéal $(m, \ \theta - c)$, dont la norme est le facteur au plus égal à l'autre. Dans le tableau prolongé en deçà de 0, on a inscrit les idéaux conjugués $(m, \ \theta - c')$.

Il y a cinq idéaux réduits remarquables: trois idéaux doubles, de normes **1**, **3**, **7**, qui définissent des classes doubles; un couple d'idéaux réfléchis, de norme **8**, qui définissent une même classe double. Enfin quatre couples d'idéaux conjugués, de normes 2, 4, 5, 6, définissant des couples de classes conjuguées. En tout:

$$4+2\times 4 = 12 \text{ classes.}$$

D'autres tableaux de ce même chapitre donnent encore des exemples de calcul d'idéaux réduits et de classes d'idéaux dans des corps quadratiques imaginaires.

Le tableau XI concerne des corps qui ne contiennent qu'une seule classe et, par suite, sont *principaux.*

Les tableaux XII et XIV concernent des corps dont le discriminant est premier; ils n'ont donc que le seul idéal réduit remarquable (1) et des couples d'idéaux réduits conjugués; en tout un nombre impair de classes.

Les tableaux XV, XVII, XVIII concernent des corps dont le discriminant est composé, pair ou impair.

32. Répartition des idéaux dans les classes.

Les idéaux réduits d'un corps imaginaire et les classes qu'ils définissent étant ainsi calculés, on peut répartir, dans ces classes, les idéaux canoniques donnés par le tableau des valeurs du polynôme fondamental (**21**). Il suffit d'appliquer le calcul de récurrence indiqué ci-dessus (**25**).

Si deux idéaux canoniques conjugués (éventuellement égaux) **M** et **M**′ ne sont pas réduits, en considérant l'associé de l'un d'eux suivant sa racine minimum (par exemple celle qui est positive), on peut construire un couple d'idéaux conjugués respectivement congrus à **M**′ et **M**, et de norme inférieure. En recommençant éventuellement cette construction, par récurrence descendante, on aboutit à un couple d'idéaux conjugués réduits et, par suite à l'indication des classes auxquelles appartiennent **M** et **M**′.

Exemple. — Le tableau X, donne un exemple de répartition d'idéaux canoniques en classes, pour le corps de discriminant —231, déjà utilisé comme exemple de construction d'idéaux réduits.

Devant chaque valeur $F(c)$, pour c de 0 à 12, on a inscrit les divers couples d'*idéaux associés* (**21** et **24**), donnés par les décompositions:

$$F(c) = m \times n; \qquad (\theta - c) = (m,\ \theta - c) \times (n,\ \theta - c);$$

toutefois les racines indiquées sont les plus petites racines positives, par exemple:

$$F(5) = 88; \qquad (4,\ \theta - 1) \quad (22,\ \theta - 5).$$

Les douze classes ont été désignées par les normes, éventuellement accentuées des idéaux réduits qui les définissent:

classes doubles: **1** — **3** — **7** — **8**;

couples de classes conjuguées: **2**, **2**′ — **4**, **4**′ — **5**, **5**′ — **6**, **6**′.
On a inscrit ces nombres en caractères gras, devant les treize idéaux réduits (la classe **8** contenant deux idéaux congrus, réfléchis), définis par leur plus petite racine positive.

On les a inscrit, en caractères ordinaires, devant les idéaux obtenus pour la première fois, ce nombre étant déterminé par l'idéal réduit congru, obtenu comme il vient d'être dit.

On indique, en exemple, cette construction, pour les idéaux, de norme $10 = 2 \times 5$, qui forment deux couples d'idéaux conjugués; 2 et 5 n'étant pas facteurs du discriminant.

Les idéaux conjugués, inscrits dans la table:

$$(10,\ \theta - 1) \quad \text{et} \quad (10,\ \theta + 2) = (10,\ \theta - 8)$$

Tableau X.

Répartition des idéaux en classes.

$F(x) = x^2+x+58$; $D = -231 = (-3)\times(-7)\times(-11)$

c	$F(c)$				
0	58	(**1**, θ—0)	**1**	(58, θ—0)	1
		(**2**, θ—0)	**2**	(29, θ—0)	2
1	60	(1, θ—0)		(60, θ—1)	1
		(**2**, θ—1)	**2**′	(30, θ—1)	2
		(**3**, θ—1)	3	(20, θ—1)	3
		(**4**, θ—1)	**4**	(15, θ—1)	4′
		(**5**, θ—1)	**5**	(12, θ—1)	5′
		(**6**, θ—1)	**6**	(10, θ—1)	6′
2	64	(1, θ—1)		(64, θ—2)	1
		(2, θ—0)		(32, θ—2)	2′
		(**4**, θ—0)	**4**′	(16, θ—2)	4
		(**8**, θ—2)	**8**		
3	70	(1, θ—0)		(70, θ—3)	1
		(2, θ—1)		(35, θ—3)	2
		(**5**, θ—3)	**5**′	(14, θ—3)	5
		(**7**, θ—3)	**7**	(10, θ—3)	7
4	78	(1, θ—0)		(78, θ—4)	1
		(2, θ—0)		(39, θ—4)	2′
		(3, θ—1)		(26, θ—4)	3
		(**6**, θ—4)	**6**′	(13, θ—4)	6
5	88	(1, θ—0)		(88, θ—5)	1
		(2, θ—1)		(44, θ—5)	2
		(4, θ—1)		(22, θ—5)	4′
		(**8**, θ—5)	**8**	(11, θ—5)	8
6	100	(1, θ—0)		(100, θ—6)	1
		(2, θ—0)		(50, θ—6)	2′
		(4, θ—2)		(25, θ—6)	4
		(5, θ—1)		(20, θ—6)	5′
				(10, θ—6)	7

c	$F(c)$				
7	114	(1, θ—0)		(114, θ—7)	1
		(2, θ—1)		(57, θ—7)	2
		(3, θ—1)		(38, θ—7)	3
		(6, θ—1)		(19, θ—7)	6′
8	130	(1, θ—0)		(130, θ—8)	1
		(2, θ—0)		(65, θ—8)	2′
		(5, θ—3)		(26, θ—8)	5
		(10, θ—8)	6	(13, θ—8)	6′
9	148	(1, θ—0)		(148, θ—9)	1
		(2, θ—1)		(74, θ—9)	2
		(4, θ—1)		(37, θ—9)	4′
10	168	(1, θ—0)		(168, θ—10)	1
		(2, θ—0)		(84, θ—10)	2′
		(3, θ—1)		(56, θ—10)	3
		(4, θ—2)		(42, θ—10)	4
		(6, θ—4)		(28, θ—10)	6
		(7, θ—3)		(24, θ—10)	7
		(8, θ—2)		(21, θ—10)	8
		(12, θ—10)	5	(16, θ—10)	5′
11	190	(1, θ—0)		(190, θ—11)	1
		(2, θ—1)		(95, θ—11)	2
		(5, θ—1)		(38, θ—11)	5′
		(10, θ—1)		(19, θ—11)	6
12	214	(1, θ—0)		(214, θ—12)	1
		(2, θ—0)		(107, θ—12)	2′

12 Classes: **1**, **3**, **7**, **8**, doubles; **2**,**2′**—**4**,**4′**—**5**,**5′**—**6**,**6′**.

ne sont pas réduits. La décomposition:

$$F(1) = F(-2) = 60 = 6 \times 10: \quad (\theta-1) = (6,\ \theta-1) \times (10,\ \theta-1);$$

montre que le premier est congru au conjugué de $(6,\ \theta-1)$, qui est réduit; il appartient à la classe désignée par **6′** et son conjugué est dans **6**.

Les autres idéaux, de norme 10:

$$(10,\ \theta-3) \quad \text{et} \quad (10,\ \theta+4) = (10,\ \theta-6),$$

ne sont pas non plus réduits. La décomposition:

$$F(3) = F(-4) = 70 = 7 \times 10$$

montre qu'ils sont congrus aux idéaux conjugués, de norme 7; mais ces idéaux sont égaux —ou doubles— . Les deux idéaux appartiennent à la classe désignée par **7** et sont congrus. On remarquera d'ailleurs que le second est réfléchi, relativement à la racine 6 ($F(6) = 100$).

On peut aussi bien rechercher la classe d'un idéal, donné par la décomposition d'une valeur de $F(x)$, extérieure à la table, par exemple $F(103) = 30 \times 359$. Les idéaux conjugués, de norme 359, sont

$$\mathbf{M} = (359,\ \theta-103), \qquad \mathbf{M}' = (359,\ \theta+104) = (359,\ \theta-255).$$

Cette décomposition montre que $\mathbf{M}'$ et $\mathbf{M}$ sont respectivement congrus aux idéaux conjugués:

$$(30,\ \theta-103) = (30,\ \theta-13), \qquad (30,\ \theta+104) = (30,\ \theta-16).$$

La décomposition $F(13) = 240 = 8 \times 30$, montre que ces idéaux, et par suite $\mathbf{M}'$ et $\mathbf{M}$ sont congrus aux idéaux conjugués de norme 8, qui sont congrus entre eux; ils appartiennent donc à la classe double **8**.

33. Structure du groupe des classes d'idéaux.

Pour construire le groupe des classes d'idéaux, d'un corps imaginaire, on peut, évidemment, utiliser les idéaux réduits qui caractérisent —ou déterminent— ces classes. On peut, d'abord, former une table de multiplication du groupe, en déterminant *à quels idéaux réduits sont congrus* —donc à quells classes appar-