

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 6 (1960)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LES CORPS QUADRATIQUES  
**Autor:** Châtelet, A.  
**Kapitel:** 24. Congruence d'idéaux canoniques.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-36342>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 29.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 24. Congruence d'idéaux canoniques.

La congruence des idéaux et la formation des classes peuvent être ramenées à une congruence et à un calcul d'idéaux canoniques, en utilisant la remarque suivante :

*Un idéal fractionnaire  $\mathbf{I} = q \times \mathbf{M}$  est congru à son facteur canonique  $\mathbf{M}$ .*

La forme canonique d'un idéal  $\mathbf{I}$  (8) est en effet le produit de son facteur canonique  $\mathbf{M}$  par le facteur rationnel  $q$ , —ou l'idéal principal (rationnel)  $(q)$ — (12).

Donc deux idéaux, non nuls, sont congrus, si et seulement si il en est ainsi de leurs facteurs canoniques (puisque la congruence est transitive).

Ces considérations sont encore des conséquences des propriétés générales des groupes. Le groupe  $\mathcal{R}$ , des idéaux principaux admet comme sous-groupe, le groupe  $\mathcal{Q}$  des idéaux principaux rationnels. Dans chaque classe de  $\mathcal{G}$  et de  $\mathcal{R}$ , mod.  $\mathcal{Q}$ , il y a un et un seul idéal canonique. La répartition des idéaux canoniques en classes est donc équivalente à la formation du groupe quotient des groupes quotients  $(\mathcal{G}|\mathcal{Q})|(\mathcal{R}|\mathcal{Q})$ .

La relation d'association (16) d'idéaux canoniques, qui se présente naturellement, comme il a été dit (21), dans l'algorithme du tableau de valeurs, entraîne une relation entre les classes.

**THÉORÈME** des idéaux associés. — *Deux idéaux canoniques associés, relativement à une racine  $c$ , définissent —ou engendrent— des classes inverses, donc conjuguées (23).* En particulier un idéal réfléchi définit une classe double (23).

En effet, le produit de deux idéaux associés, suivant une racine  $c$ , étant l'idéal principal  $(\theta - c)$ , le produit des classes qu'ils définissent est la classe principale —ou chacun est congru à l'idéal conjugué de l'autre— :

$$\mathbf{M} \times \mathbf{N} = (\theta - c) \Rightarrow \mathbf{M} \sim \mathbf{N}' \text{ et } \mathbf{M}' \sim \mathbf{N}.$$

On peut expliciter cette relation de congruence en précisant une base de l'idéal principal multiplicateur. Les expressions :

$$\mathbf{M} = (m, \theta - c), \quad \mathbf{N} = (n, \theta - c); \quad m \times n = |F(c)|;$$

entraînent :

$$\mathbf{M} \times [(\theta' - c) : m] = \mathbf{N}' ; \quad \mathbf{M} = \mathbf{N}' \times [(\theta - c) : n].$$

En appliquant la règle du produit d'idéaux, définis l'un par une *base arithmétique*, l'autre par une *base algébrique* (13), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \times (\theta' - c) &= (m, \theta - c) \times (\theta' - c) = (m \times (\theta' - c), (\theta - c) \times (\theta' - c)) \\ &= (m \times (\theta' - c), F(c)) = (m \times (\theta' - c), m \times n) = (m) \times \mathbf{N}'. \end{aligned}$$

On peut vérifier de même la seconde formule ; on peut aussi bien former le produit des deux multiplicateurs indiqués qui doivent être inverses :

$$\begin{aligned} [(\theta' - c) : m] \times [(\theta - c) : n] &= \\ [(\theta' - c) \times (\theta - c)] : (m \times n) &= [F(c)] : (m \times n) ; \end{aligned}$$

le résultat est bien égal à +1 ou à -1 (suivant le signe de  $F(c)$ ).

La congruence de deux idéaux canoniques établit entre leurs éléments une correspondance biunivoque qui conserve l'addition — ou est un *isomorphisme des modules* — . Elle fait par suite correspondre des bases arithmétiques libres (9).

**THÉORÈME** des bases des idéaux congrus. — *Une congruence entre des idéaux canoniques  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{M}_1$ , fait correspondre à une base arithmétique libre, de l'un  $\mathbf{M}_1$  (qui peut être sa base canonique), une base arithmétique libre de l'autre  $\mathbf{M}$  (donc équivalente arithmétiquement à sa base canonique (9)).*

Les éléments  $\xi$ , de l'idéal canonique  $\mathbf{M}_1$ , sont des entiers algébriques, représentés proprement, au moyen d'une base arithmétique libre de deux éléments  $\alpha_1 \beta_1$  par les expressions :

$$\xi = x \times \alpha_1 + y \times \beta_1 ; \quad x, y \text{ entiers rationnels.}$$

La congruence étant définie par un multiplicateur (élément du corps)  $\rho$ , non nul, les produits :

$$\rho \times \xi = \rho \times (x \times \alpha_1 + y \times \beta_1) = x \times (\rho \times \alpha_1) + y \times (\rho \times \beta_1),$$

sont des éléments de  $\mathbf{M} = \rho \mathbf{M}_1$ , donc des entiers algébriques, qui sont représentés ainsi au moyen de la *base arithmétique*  $\rho \times \alpha_1 \rho \times \beta_1$ . Cette représentation est propre et la *base est libre*, car l'annulation de  $\rho \times \xi$  est équivalente à celle de  $\xi$  ; donc à celle de  $x$  et de  $y$ .

En outre les éléments de  $\mathbf{M}$  et de  $\mathbf{M}_1$  se correspondent, en étant représentés par les mêmes coefficients (entiers rationnels) relativement aux bases correspondantes,  $\alpha_1 \beta_1$  et  $\rho \times \alpha_1 \rho \times \beta_1$ .

Cette correspondance peut notamment être appliquée à des idéaux congrus, construits par l'intermédiaire d'idéaux associés :

$$\mathbf{M} = (m, \theta - c), \quad \mathbf{N} = (n, \theta - c); \quad \mathbf{M}_1 = \mathbf{N}'.$$

La congruence de  $\mathbf{M}_1$  à  $\mathbf{M}$  est réalisée par le multiplicateur  $(\theta - c) : n$ . Appliqué à la base  $(n, \theta' - c)$ , de  $\mathbf{M}_1$  il donnerait la base canonique de  $\mathbf{M}$ . Mais, appliqué à une base  $(n, \theta - c_1)$ , (où  $c_1$  est une racine conjuguée de  $c$ , suivant le module  $n$ ), il donne une base arithmétique libre de  $\mathbf{M}_1$  :

$$n \times [(\theta - c) : n] = (\theta - c), \quad [(\theta - c_1) \times (\theta - c)] : n$$

qui peut être différente de la base canonique, mais lui est arithmétiquement équivalente.

Dans l'exemple du tableau I, on peut considérer les idéaux associés :

$$\mathbf{M} = (3, \theta - 1), \quad \mathbf{N} = (4, \theta - 1), \quad \mathbf{M}_1 = \mathbf{N}' = (4, \theta - 2);$$

le multiplicateur de  $\mathbf{M}_1$  étant  $(\theta - 1) : 4$ , à la base choisie de  $\mathbf{M}_1$ , il fait correspondre :

$$4 \times [(\theta - 1) : 4] = \theta - 1, \quad [(\theta - 1) \times (\theta - 2)] : 4 = -\theta - 2.$$

On vérifie bien que ce couple d'éléments est bien arithmétiquement équivalent à la base canonique de  $\mathbf{M}$  :

$$\left\| \begin{array}{c} \theta - 1 \\ -\theta - 2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{array} \right\| \times \left\| \begin{array}{c} 3 \\ \theta - 1 \end{array} \right\|$$

### 25. Idéaux canoniques réduits.

THÉORÈME du nombre de classes d'idéaux. — Dans un corps quadratique, le nombre de classes d'idéaux, (mod.  $\mathcal{R}$ ) — ou l'ordre du groupe quotient  $\mathcal{G} | \mathcal{R}$  — est fini.