

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 6 (1960)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES MODÈLES LINÉAIRES EN ANALYSE STATISTIQUE
Autor: Breny, H.
Kapitel: 4, 3. Problèmes de classification.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-36341>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

d'où

$$\mathfrak{G}_K = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{vmatrix}, \quad \begin{aligned} \hat{\gamma}_0 &= \mathbf{A}_1/6 \\ \hat{\gamma}_1 &= \mathbf{A}_2/4 \\ \hat{\gamma}_2 &= \mathbf{A}_3/60 \end{aligned}$$

$$\mathbf{SC}\{\hat{\gamma}_0\} = A_1^2/6, \quad \mathbf{SC}\{\hat{\gamma}_1\} = \mathbf{A}_2^2/4, \quad \mathbf{SC}\{\hat{\gamma}_2\} = \mathbf{A}_3^2/60.$$

$$\mathbf{SC}\{\hat{\gamma}_0\} = \mathbf{red}[\beta_0], \quad \mathbf{SC}\{\hat{\gamma}_1\} = \mathbf{red}[\beta_1 | \beta_0], \quad \mathbf{SC}\{\hat{\gamma}_2\} = \mathbf{red}[\beta_2 | \beta_0, \beta_1]$$

$$\mathbf{SC}N = \mathbf{SC}\{\hat{\gamma}_0\} + \mathbf{SC}\{\hat{\gamma}_1\} + \mathbf{SC}\{\hat{\gamma}_2\},$$

$$\mathbf{SC}E = \mathbf{SC}T - \mathbf{SC}N.$$

4, 3. Problèmes de classification.

4, 31. Supposons que l'on dispose des valeurs observées de douze aléatoires normales, indépendantes, de même variance σ^2 , classées suivant deux critères: « lignes », de « valeurs » L_1 et L_2 , et « colonnes », de « valeurs » C_1 , C_2 , C_3 , suivant le schéma

	C_1	C_2	C_3
L_1	x_1, x_2	x_3, x_4	x_5, x_6
L_2	x_7, x_8	x_9, x_{10}	x_{11}, x_{12}

On suppose a priori qu'il y a additivité, c'est-à-dire qu'il existe cinq nombres $\lambda_1, \lambda_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ tels que la valeur moyenne d'une observation de la ligne L_i et de la colonne C_k soit $\lambda_i + \gamma_k$ ($i = 1, 2$; $k = 1, 2, 3$). On a donc, par hypothèse,

$$\mathbf{E} \begin{vmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_4 \\ \mathbf{x}_5 \\ \mathbf{x}_6 \\ \mathbf{x}_7 \\ \mathbf{x}_8 \\ \mathbf{x}_9 \\ \mathbf{x}_{10} \\ \mathbf{x}_{11} \\ \mathbf{x}_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Si on appelle $S_{i,-}$ la somme des observations de la ligne L_i , et $S_{-,j}$ celle des observations de la colonne C_k , les équations normales s'écrivent:

$$6\hat{\lambda}_1 + 2\hat{\gamma}_1 + 2\hat{\gamma}_2 + 2\hat{\gamma}_3 = \mathbf{s}_{1,-} \quad (a)$$

$$6\hat{\lambda}_2 + 2\hat{\gamma}_1 + 2\hat{\gamma}_2 + 2\hat{\gamma}_3 = \mathbf{s}_{2,-} \quad (b)$$

$$2\hat{\lambda}_1 + 2\hat{\lambda}_2 + 4\hat{\gamma}_1 = \mathbf{S}_{-,1} \quad (c)$$

$$2\hat{\lambda}_1 + 2\hat{\lambda}_2 + 4\hat{\gamma}_2 = \mathbf{S}_{-,2} \quad (d)$$

$$2\hat{\lambda}_1 + 2\hat{\lambda}_2 + 4\hat{\gamma}_3 = \mathbf{S}_{-,3} \quad (e)$$

Ici, manifestement, $p = 5$, $r = 4$ [en effet, $(a) + (b) \equiv (c) + (d) + (e)$]. On est donc amené à mettre en évidence quatre combinaisons estimables fondamentales; on peut prendre

$$\mu = 6(\lambda_1 + \lambda_2) + 4(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)$$

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$$

$$\Delta_1 \gamma = \gamma_1 - \gamma_2, \quad \Delta' \gamma = \gamma_1 - \gamma_3.$$

On constate immédiatement que les estimateurs privilégiés de ces quatre combinaisons sont deux à deux orthogonaux, à l'exception près de la dernière paire; l'orthogonalité complète est atteinte en remplaçant $\Delta' \gamma$ par

$$\Delta_2 \gamma = (\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3)/2 = (\lambda_1 + \lambda_2)/2 - \lambda_3.$$

Alors:

$$\hat{\mu} = \mathbf{S}_{1,-} + \mathbf{S}_{2,-} (= \mathbf{S}_{-,1} + \mathbf{S}_{-,2} + \mathbf{S}_{-,3}),$$

$$\hat{\Delta\lambda} = (\mathbf{S}_{1,-} - \mathbf{S}_{2,-})/6$$

$$\hat{\Delta_1 \gamma} = (\mathbf{S}_{-,1} - \mathbf{S}_{-,2})/4$$

$$\hat{\Delta_2 \gamma} = (\mathbf{S}_{-,1} + \mathbf{S}_{-,2} - 2\mathbf{S}_{-,3})/8.$$

Ici, on peut calculer

$$\mathbf{SC}int = (1/2)[(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2 + \dots + (\mathbf{x}_{11} - \mathbf{x}_{12})^2],$$

avec six degrés de liberté, puis, avec deux degrés de liberté,

$$\mathbf{SC}EM = \mathbf{SCE} - \mathbf{SC}int.$$

On notera que, ici, on a

$$\mathbf{SC}\{\hat{\mu}\} = \mathbf{red}[\mu] = \mathbf{red}[\mu \mid \Delta\lambda] = \dots = \mathbf{red}[\mu \mid \Delta\lambda, \Delta_1 \gamma, \Delta_2 \gamma],$$

et des relations analogues pour les autres paramètres; ceci en vertu de l'orthogonalité de leurs estimateurs privilégiés.

$\mathbf{SC}EM$ peut servir à éprouver l'hypothèse d'additivité, mais on ne le voit clairement qu'en étudiant le modèle non additif.

4, 32. Ne supposons donc plus a priori qu'il y ait additivité; admettons que

$$\mathbf{E} \mathbf{x}_{2i-1} = \mathbf{E} \mathbf{x}_{2i} = M_i ,$$

de sorte que $p = 6$, $\mathbf{b}_H = \| M_1 \ M_2 \ M_3 \ M_4 \ M_5 \ M_6 \| ^T$. On voit aisément que

$$\mathfrak{G} = \text{diag} (2, \dots, 2)$$

d'où

$$\hat{\mathbf{M}}_i = (\mathbf{x}_{2i-1} + \mathbf{x}_{2i})/2 ,$$

$$\mathbf{SC} \{ \hat{\mathbf{M}}_i \} = (\mathbf{x}_{2i-1} + \mathbf{x}_{2i})^2/2 ,$$

$$\mathbf{SC} N = \sum_1^6 \mathbf{SC} \{ \hat{\mathbf{M}}_i \} ,$$

$$\mathbf{SC} E = \sum_1^{12} \mathbf{x}_i^2 - \mathbf{SC} N = (1/2) \sum_1^6 (\mathbf{x}_{2i} - \mathbf{x}_{2i-1})^2 .$$

Donc, pour le modèle général actuel, $\mathbf{SC} E$ vaut l'expression $\mathbf{SC} int$ du modèle additif.

L'hypothèse d'additivité (c'est-à-dire, répétons-le, l'hypothèse qu'il existe cinq nombres $\lambda_1, \lambda_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ tels que

$$M_1 = \lambda_1 + \gamma_1, \quad M_2 = \lambda_1 + \gamma_2, \dots, \quad M_6 = \lambda_2 + \gamma_3)$$

est satisfaite si et seulement si

$$\theta_1 \equiv M_1 - M_2 - M_4 + M_5 = 0, \quad \theta_2 \equiv M_1 - M_3 - M_4 + M_6 = 0 .$$

On doit donc former, pour éprouver cette hypothèse,

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\mathbf{M}}_1 - \hat{\mathbf{M}}_2 - \hat{\mathbf{M}}_4 + \hat{\mathbf{M}}_5, \quad \hat{\theta}_2 = \hat{\mathbf{M}}_1 - \hat{\mathbf{M}}_3 - \hat{\mathbf{M}}_4 + \hat{\mathbf{M}}_6 ,$$

puis $\mathbf{SC} \{ \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2 \}$, et éprouver si $\mathbf{SC} \{ \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2 \}$ est, ou non, significativement plus grande que $\mathbf{SC} E$ ($\mathbf{SC} int$ du modèle additif). $\hat{\theta}_2$ n'est pas orthogonal à $\hat{\theta}_1$, mais bien

$$\hat{\theta}_3 = 2 \hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1 = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 - 2\mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_4 + \mathbf{M}_5 - 2\mathbf{M}_6 ;$$

or,

$$\mathbf{SC} \{ \hat{\theta}_1 \} = \hat{\theta}_1^2/8, \quad \mathbf{SC} \{ \hat{\theta}_3 \} = \hat{\theta}_3^2/24 ,$$

$$\mathbf{SC} \{ \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2 \} = \mathbf{SC} \{ \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_3 \} = \mathbf{SC} \{ \hat{\theta}_1 \} + \mathbf{SC} \{ \hat{\theta}_3 \} ,$$

ce qui permet d'éprouver l'additivité.

On montre aisément que $\mathbf{SC}\{\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\}$ n'est autre que \mathbf{SC}_{EM} du modèle additif. Chacune de ces deux sommes de carrés est en effet due à un sous-espace de \mathbf{V}^* ayant deux dimensions et orthogonal tant à $\hat{\mu}, \hat{\Delta}\lambda, \hat{\Delta}_1\gamma, \hat{\Delta}_2\gamma$ qu'aux différences « internes » $x_{2i} - x_{2i-1}$, et un tel espace est unique.

$\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$ (et leurs combinaisons linéaires, notamment $\hat{\theta}_3$) portent le nom de « contrastes de non-additivité » (le terme « contrastes d'interaction » n'est guère heureux). On remarquera que, si les M_i déterminent entièrement les paramètres « orthogonalement estimables » $\mu, \Delta\lambda, \Delta_1\gamma, \Delta_2\gamma, \theta_1, \theta_2$, ceux-ci à leur tour déterminent entièrement les M_i . C'est en le posant au moyen des paramètres μ, \dots, θ_2 que le problème de la classification (2×3) (avec un nombre quelconque d'observations par cellule) se traite le plus aisément. Toutefois, ces paramètres ne restent orthogonalement estimables que si toutes les cellules renferment un même nombre d'observations.

Remarque. — Ces considérations s'étendent immédiatement aux autres problèmes de classification.

4, 4. Covariance¹⁵⁾.

4, 41. Supposons que l'on dispose d'une observation de chacune de n variables aléatoires indépendantes, normales, de même variance σ^2 , réparties en s groupes, le $i^{\text{ème}}$ groupe étant formé de n_i éléments, avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} \mathbf{x}_{i,j} = T_i + \beta v_{i,j} \\ i = 1, \dots, s ; \quad j = 1, \dots, n_i ; \quad n_1 + \dots + n_s = n ; \end{array} \right.$$

les $v_{i,j}$ étant des nombres certains¹⁶⁾. On a ici

$$\mathbf{b}_H = \| T_1, \dots, T_s, \beta \| ^T ,$$

et, en supposant que dans chaque groupe il y a au moins deux valeurs $v_{i,j}$ distinctes,

$$p = r = s + 1 .$$