# 4, 2. Problèmes de régression.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1960)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

4, 12. Soit $(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_q)$ un échantillon simple et fortuit d'une population normale de moyenne $\mu_1$ et écart-type $\sigma$, $(\mathbf{x}_{q+1}, ..., \mathbf{x}_n)$ un échantillon simple et fortuit d'une population normale de moyenne $\mu_2$ et écart-type $\sigma$, les deux échantillons étant mutuellement indépendants. La théorie des modèles linéaires s'applique encore:

$$\mathbf{E}\begin{Vmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_q \\ \mathbf{x}_{q+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{Vmatrix},$$

$$r = p = 2\ , \qquad \mathfrak{b}_H^T = \| \mu_1, \mu_2 \|\ , \qquad \mathfrak{A}^T \mathfrak{A} = \begin{Vmatrix} q & 0 \\ 0 & n - q \end{Vmatrix}.$$

Si on pose

$$\sum_1^q \mathbf{x}_i^s = \mathbf{S}_{1,s}\ , \qquad \sum_{q+1}^n \mathbf{x}_i^s = \mathbf{S}_{2,s}\ ,$$

on a

$$\hat{\mu}_1 = \mathbf{S}_{1,1}/q\ , \qquad \hat{\mu}_2 = \mathbf{S}_{2,1}/(n-q)\ ,$$

$$\mathbf{SC}E = \frac{q\,\mathbf{S}_{1,2} - (\mathbf{S}_{1,1})^2}{q} + \frac{(n-q)\,\mathbf{S}_{2,2} - (\mathbf{S}_{2,1})^2}{n-q}\ ,$$

de sorte que, sous l'hypothèse $\mu_1 - \mu_2 = \Delta$, l'expression

$$\frac{(\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 - \Delta)\sqrt{(n-2)}}{\sqrt{\left[\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{n-q}\right)\mathbf{SC}E\right]}}$$

est une aléatoire $\mathbf{t}_{n-2}$; $\mathbf{SC}E/\sigma^2$ est une aléatoire $\chi^2_{n-2}$.

## 4, 2. *Problèmes de régression.*

4, 211. Supposons que, $u_1, ..., u_s$ étant des constantes certaines deux à deux distinctes, on ait $n = \Sigma_1^s k_i$ variables aléatoires $\mathbf{x}_{i,j}$ $(i = 1, ..., s;\ j = 1, ..., k_i)$, normales, de variance commune $\sigma^2$, indépendantes, avec

$$\mathbf{E}\,\mathbf{x}_{i,j} = \alpha + \beta u_i\ . \qquad (17)$$

Ce cas rentre dans le cadre général des modèles linéaires moyennant

$$\mathfrak{b}_H = \| \alpha \quad \beta \|^T , \quad \mathfrak{A} = \left\| \begin{matrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ u_1 & \dots & u_1 & u_2 & \dots & u_2 & \dots & u_s & \dots & u_s \end{matrix} \right\|^T$$

($\mathfrak{A}$ composée de $s$ groupes ayant respectivement $k_1, k_2, \dots, k_s$ lignes identiques entre elles); ici, $r = p = 2$. Si l'on procède comme au § 3, 232, en posant

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{k_i} u_i^q \, \mathbf{x}_{i,j}^t = \mathbf{S}_{q,t} \; ; \quad S_{0,0} \equiv n \; ; \quad S_{q,0} = \sum_{1}^{i} k_i \, u_i^q \; ;$$

$$L_{u,u} = \frac{n \, S_{2,0} - S_{1,0}^2}{n} \; ; \qquad \mathbf{L}_{u,x} = \frac{n \, \mathbf{S}_{1,1} - S_{1,0} \, \mathbf{S}_{0,1}}{n} \; ;$$

on a, successivement,

$$\mathfrak{G} = \left\| \begin{matrix} n & S_{1,0} \\ S_{1,0} & S_{2,0} \end{matrix} \right\|$$

$$\mathfrak{S} = \left\| \begin{matrix} \sqrt{n} & S_{1,0}/\sqrt{n} \\ 0 & \sqrt{L_{u,u}} \end{matrix} \right\| \qquad \mathfrak{A}^T \mathfrak{x} = \left\| \begin{matrix} \mathbf{S}_{0,1} \\ \mathbf{S}_{1,1} \end{matrix} \right\| \qquad \hat{\mathfrak{b}}_K = \left\| \begin{matrix} \mathbf{S}_{0,1}/\sqrt{n} \\ \mathbf{L}_{u,x} \end{matrix} \right\|$$

$$\hat{\mathfrak{b}}_H^T = \left\| \frac{\mathbf{S}_{0,1}}{n} - \frac{S_{1,0}}{n} \frac{\mathbf{L}_{u,x}}{L_{u,u}} \qquad \frac{\mathbf{L}_{u,x}}{L_{u,u}} \right\|$$

d'où la table d'analyse de variance:

| | | |
|---|---|---|
| $SCT = S_{0,2}$ | | $n \; d.l.$ |
| | $\begin{cases} \text{red}\,[\alpha] = (S_{0,1})^2/n \\ \text{red}\,[\beta \mid \alpha] = (L_{u,x})^2 \end{cases}$ | $\begin{cases} 1 \; d.l. \\ 1 \; d.l. \end{cases}$ |
| $SCN = \text{red}\,[\alpha] + \text{red}\,[\beta \mid \alpha]$ | | $2 \; d.l.$ |
| $SCE = SCT - SCN$ | | $(n - 2) \; d.l.$ |

4, 212. On peut traiter ce même problème d'une manière un peu différente, en posant

$$u_i' = u_i - S_{1,0}/n \; ,$$

$$\alpha + \beta \, u_i \equiv \alpha' + \beta' \, u_i' \qquad (\beta' = \beta \; , \quad \alpha' = \alpha + \beta \, S_{1,0}/n) \; ;$$

ceci revient à changer de base dans $\mathsf{B}$, et nous écrirons

$$\mathfrak{b}_{H'} = \| \alpha' \; \beta' \| \; .$$

On a alors, en marquant de l'apostrophe les expressions propres à la forme actuelle du modèle considéré,

$$\mathfrak{A}' = \left\| \begin{matrix} 1 \ \dots \ 1 & 1 \ \dots \ 1 & \dots & 1 \ \dots \ 1 \\ u'_1 \ \dots \ u'_1 & u'_2 \ \dots \ u'_2 & \dots & u'_s \ \dots \ u'_s \end{matrix} \right\|^T ,$$

$$S'_{1,0} = 0 \ , \quad S'_{2,0} = L_{u,u} \ , \qquad \mathbf{S}'_{1,1} = \mathbf{L}_{u,x} \ ,$$

$$\mathfrak{G}' = \operatorname{diag}(n, L_{u,u}) \ ; \quad \mathfrak{A}^T \mathfrak{x} = \| \ \mathbf{S}_{0,1} \quad \mathbf{L}_{u,x} \ \|^T$$

$$\hat{\alpha}' = \mathbf{S}_{0,1}/n \qquad \hat{\beta}' = \mathbf{L}_{u,x}/L_{u,u} \ (= \hat{\beta}) \ .$$

La table d'analyse de la variance ne change évidemment pas.

La méthode du § 3, 232 constitue, en quelque sorte, une orthogonalisation a posteriori: on part de $\mathfrak{h}_H$, les vecteurs $\varepsilon_i^T \hat{\mathfrak{h}}_H$ ($\in \mathsf{V}^\star$) ne sont pas orthogonaux, mais les calculs introduisent d'eux-même une base $\mathfrak{K}$ telle que les vecteurs $\varepsilon_i^T \hat{\mathfrak{h}}_K$ soient orthogonaux. Ici, nous venons de procéder à une orthogonalisation a priori: nous avons d'emblée introduit une base $\mathfrak{H}'$ telle que la matrice $\mathfrak{G}'$ relative à cette base soit diagonale, ce qui garantit l'orthogonalité des vecteurs $\varepsilon_i^T \hat{\mathfrak{h}}_{H'}$. Cette seconde méthode est souvent préférable à la première. C'est sur elle que reposent, notamment, les procédés de « codage linéaire » utilisés, dans les manuels d'analyse statistique, pour l'étude des plans factoriels à facteurs quantitatifs (plans factoriels « de régression »).

4, 213. Il arrive que l'on désire contrôler, par les observations elles-mêmes, la validité de la relation (17). Le modèle basé sur (17) est alors considéré comme un cas particulier du modèle défini par

$$\mathbf{E}\, \mathbf{x}_{i,j} = M_i \ ;$$

dans ce modèle plus général, l'espace des erreurs, $\mathsf{V}_*$, est engendré par les fonctionnelles de $\mathfrak{x}$ qui sont de la forme $(x_{i,j} - x_{i,k})$; il admet donc la base suivante:

$$x_{i,1} - x_{i,2}, \ \dots, \ x_{i,1} - x_{i,k_i} \ , \qquad i = 1, 2, \dots, s \ ,$$

laquelle s'orthogonalise en

$$\begin{cases} \mathfrak{h}^\star_{i,t} \mathfrak{x} \equiv x_{i,1} + \dots + x_{i,t-1} - (t-1)\, x_{i,t} \\ \qquad i = 1, \dots, s; \quad t = 2, \dots, k_i \ . \end{cases}$$

On a alors

$$SCint \equiv SC\,\mathsf{V}_* = \sum_{i=1}^{s} \sum_{t=2}^{k_i} SC\left\{ \mathfrak{d}_{i,t}^{\star} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \sum_{t=2}^{k_i} \left(\mathfrak{d}_{i,t}^{\star}\,\mathfrak{x}\right)^2/(t-1)\,t$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \frac{k_i \sum_{j=1}^{k_i} x_{i,j}^2 - \left(\sum_{j=1}^{k_i} x_{i,j}\right)^2}{k_i} \qquad (18)$$

avec $\Sigma_i\,(k_i - 1) = n - s$ degrés de liberté. Le contrôle envisagé n'est donc possible que si l'un au moins des entiers $k_i$ est $> 1$, et il ne présente, en pratique, quelque intérêt que si $n - s$ est, au moins, de l'ordre de $s$. On le fait alors en comparant *SCEM* à *SCint* au moyen des tables de **F**. Si l'on procède ainsi, il sied d'utiliser *SCint*, et non *SCE*, comme dénominateur des divers $F$ calculés.

**Remarque.** — Le calcul qui a conduit à l'expression (18) de *SCint* est valide dans des conditions extrêmement générales.

4, 214. On peut évidemment éprouver des hypothèses très diverses relativement à $\alpha$ et $\beta$ (ou, ce qui revient au même, à $\alpha'$ et $\beta'$) [14]. Ainsi, l'on pourrait éprouver l'hypothèse $\beta = a$, $a$ étant un nombre donné; il suffit d'appliquer la formule du § 2, 23, en remplaçant, au besoin, *SCE* et $(n - r)$ par *SCint* et $(n - s)$. Le seul point un peu délicat est le calcul de $\mathfrak{l}^{\star}\,\mathfrak{l}$; or, on a

$$\hat{\beta} = \| l_{1,1}, \ldots, l_{1,k_1}, \ldots, l_{s,k_s} \|\,\mathfrak{x} \equiv \mathfrak{l}^{\star}\,\mathfrak{x}$$

moyennant

$$l_{i,j} = (n\,u_i - S_{1,0})/n\,L_{u,u}\ ;$$

on a donc

$$\mathfrak{l}^{\star}\,\mathfrak{l} = \sum_i \sum_j l_{i,j}^2 = 1/L_{u,u}\ ;$$

par conséquent, sous l'hypothèse $\beta = a$, l'expression

$$\frac{(\hat{\beta} - a)\,\sqrt{(n-s)}}{\sqrt{(\mathfrak{l}^{\star}\,\mathfrak{l}.\ SC\ int)}} = (\hat{\beta} - a)\,\sqrt{\frac{(n-s)\,L_{u,u}}{SC\ int}}$$

est une valeur observée d'une aléatoire $\mathbf{t}_{n-s}$ .

On éprouverait de même, par exemple, l'hypothèse que, pour des valeurs données $u_0$ et $x_0$, on a $\alpha + \beta u_0 = x_0$ (on considérerait l'expression $\hat{\alpha} + \hat{\beta}\, u_0$, qui, sous cette hypothèse, a comme moyenne $x_0$).

4, 22. Supposons que, $u$ et $v$ étant deux variables certaines, on ait

$$\mathbf{E}\,\mathbf{x}_{u,v} = \beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 v \,, \qquad (19)$$

et que les observations aient été faites aux « points » (0, 0), (2, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 2) et (1, 1); les observations sont, ici encore, censées être des valeurs observées d'aléatoires normales, indépendantes, de même variance $\sigma^2$. La théorie générale s'applique alors, avec

$$\mathfrak{b}_H = \| \beta_0, \beta_1, \beta_2 \|^T \,, \quad \mathfrak{A}_H = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{matrix} \right\|^T, \quad n = 6 \,, \quad p = r = 3 \,.$$

Il est commode de traiter ce problème par orthogonalisation à priori; on rapporte donc $\mathbf{B}$ à une base $\mathfrak{R}$ telle que les colonnes de $\mathfrak{A}_K$ soient deux à deux orthogonales; si l'on pose $\mathfrak{b}_K = \| \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \|^T$, cela revient à chercher deux polynômes du premier degré, $\varphi(u)$ et $\psi(u, v)$, tels que

$$\gamma_0 + \gamma_1 \varphi(u) + \gamma_2 \psi(u, v) \equiv \beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 v \,,$$

$$\sum_1^6 \varphi(u_i) = 0 \,, \quad \sum_1^6 \psi(u_i, v_i) = 0 \,, \quad \sum_1^6 \varphi(u_i)\, \psi(u_i, v_i) = 0 \,.$$

On peut prendre

$$\varphi(u) = u - 1 \,, \quad \psi(u, v) = -5 + u + 4v \,,$$

ce qui correspond à

$$\mathfrak{b}_H = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix} \right\| \mathfrak{b}_K \,.$$

On a alors

$$\mathbf{E} \left\| \begin{matrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_4 \\ \mathbf{x}_5 \\ \mathbf{x}_6 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{matrix} \right\|$$

$$\mathfrak{A}_K^T \mathbf{x} \equiv \left\| \begin{matrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 + \mathbf{x}_5 + \mathbf{x}_6 \\ -\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 \qquad\qquad - \mathbf{x}_5 \\ -5\mathbf{x}_1 - 3\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + 4\mathbf{x}_4 + \mathbf{x}_5 \end{matrix} \right\|$$

d'où

$$\mathfrak{G}_K = \left\| \begin{matrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{matrix} \right\| , \qquad \begin{matrix} \hat{\gamma}_0 = \mathbf{A}_1/6 \\ \hat{\gamma}_1 = \mathbf{A}_2/4 \\ \hat{\gamma}_2 = \mathbf{A}_3/60 \end{matrix}$$

$\mathbf{SC}\{\hat{\gamma}_0\} = A_1^2/6$ , $\mathbf{SC}\{\hat{\gamma}_1\} = \mathbf{A}_2^2/4$ , $\mathbf{SC}\{\hat{\gamma}_2\} = \mathbf{A}_3^2/60$ .

$\mathbf{SC}\{\hat{\gamma}_0\} = \mathbf{red}[\beta_0]$, $\mathbf{SC}\{\hat{\gamma}_1\} = \mathbf{red}[\beta_1 \mid \beta_0]$, $\mathbf{SC}\{\hat{\gamma}_2\} = \mathbf{red}[\beta_2 \mid \beta_0, \beta_1]$

$\mathbf{SC}N = \mathbf{SC}\{\hat{\gamma}_0\} + \mathbf{SC}\{\hat{\gamma}_1\} + \mathbf{SC}\{\hat{\gamma}_2\}$ ,

$\mathbf{SC}E = \mathbf{SC}T - \mathbf{SC}N$ .

## 4, 3. *Problèmes de classification.*

4, 31. Supposons que l'on dispose des valeurs observées de douze aléatoires normales, indépendantes, de même variance $\sigma^2$, classées suivant deux critères: « lignes », de « valeurs » $L_1$ et $L_2$, et « colonnes », de « valeurs » $C_1$, $C_2$, $C_3$, suivant le schéma

| | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ |
|---|---|---|---|
| $L_1$ | $x_1, x_2$ | $x_3, x_4$ | $x_5, x_6$ |
| $L_2$ | $x_7, x_8$ | $x_9, x_{10}$ | $x_{11}, x_{12}$ . |

On suppose a priori qu'il y a additivité, c'est-à-dire qu'il existe cinq nombres $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ tels que la valeur moyenne d'une observation de la ligne $L_i$ et de la colonne $C_k$ soit $\lambda_i + \gamma_k$ ($i = 1, 2$; $k = 1, 2, 3$). On a donc, par hypothèse,

$$\mathbf{E} \left\| \begin{matrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_4 \\ \mathbf{x}_5 \\ \mathbf{x}_6 \\ \mathbf{x}_7 \\ \mathbf{x}_8 \\ \mathbf{x}_9 \\ \mathbf{x}_{10} \\ \mathbf{x}_{11} \\ \mathbf{x}_{12} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & & 1 & & & \\ 1 & & 1 & & & \\ 1 & & & 1 & & \\ 1 & & & 1 & & \\ 1 & & & & 1 & \\ 1 & & & & 1 & \\ & 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & & 1 & \\ & 1 & & & 1 & \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{matrix} \right\| .$$

Si on appelle $S_{i,-}$, la somme des observations de la ligne $L_i$, et $S_{-,j}$ celle des observations de la colonne $C_k$, les équations normales s'écrivent:

$$6\hat{\lambda}_1 + 2\hat{\gamma}_1 + 2\hat{\gamma}_2 + 2\hat{\gamma}_3 = \mathbf{S}_{1,-} \qquad (a)$$

$$6\hat{\lambda}_2 + 2\hat{\gamma}_1 + 2\hat{\gamma}_2 + 2\hat{\gamma}_3 = \mathbf{S}_{2,-} \qquad (b)$$