Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 6 (1960)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES CORPS QUADRATIQUES

Autor: Châtelet, A.

Kapitel: 19. Corps (et domaine) principal.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-36339

On établit ensuite les propriétés des idéaux conjugués et des normes, sans utiliser à nouveau les idéaux canoniques, mais seulement la construction des idéaux inverses ; puis l'existence des *idéaux premiers*, c'est-à-dire les idéaux entiers dont les seuls diviseurs sont triviaux.

Enfin on en déduit l'existence et la détermination de la décomposition d'un idéal entier en produit d'idéaux premiers, puis l'existence et la détermination de la décomposition d'un idéal fractionnaire en un produit de puissances (d'exposants non nuls) d'idéaux premiers différents.

19. Corps (et domaine) principal.

Le qualificatif *principal* a déjà été utilisé pour désigner un idéal (**11**), lorsqu'il peut être engendré par une base algébrique d'un seul élément, défini au produit près par un diviseur de l'unité. On l'utilise aussi pour qualifier ceux des corps qui ne contiennent pas d'autres idéaux.

Définition. — *Un corps* $\mathbf{R}(\theta)$ [*ainsi que son domaine des entiers* $\mathbf{E}(\theta)$], *est appelé* **principal**, *lorsque tous ses idéaux*, fractionnaires, *sont principaux*.

Au moins dans un corps principal, il peut être commode d'appeler **facteur**, *un élément* ρ, *défini au produit près par un diviseur de l'unité*; [dans les corps imaginaires, à l'exception de $\mathbf{R}(i)$ et de $\mathbf{R}(j)$, un diviseur est ainsi un élément, défini, au produit près par $+1$ ou -1, ou, en abrégé, *au signe près*].

Dans un corps principal, un idéal fractionnaire est ainsi caractérisé par, ou *est associé à un facteur*, qui en constitue une base. La multiplication, et la division par un idéal non nul, sont équivalentes aux opérations de même nom sur les facteurs associés (**12** et **14**):

$$(\rho)\times(\sigma) = (\rho\times\sigma); \qquad (\rho):(\sigma) = (\rho:\sigma).$$

On peut vérifier que les éléments de base des idéaux étant des facteurs, c'est-à-dire étant définis au produit près par des diviseurs de l'unité ε, il en est de même des résultats des opérations:

$$\rho_1 = \sigma_1\times\varepsilon_1 \quad \text{et} \quad \rho_2 = \sigma_2\times\varepsilon_2$$
$$\Rightarrow \quad \rho_1\times\rho_2 = (\sigma_1\times\sigma_2)\times(\varepsilon_1\times\varepsilon_2); \qquad \rho_1:\rho_2 = (\sigma_1:\sigma_2)\times(\varepsilon_1:\varepsilon_2).$$

ε_1 et ε_2 étant des diviseurs de l'unité, c'est-à-dire étant des entiers algébriques, en même temps que leurs inverses, il en est de même de leur produit et de leur quotient (**3**).

Pour qu'un corps soit principal, il suffit que ses idéaux premiers du premier degré [canoniques] soient principaux; il en est toujours ainsi des idéaux premiers du second degré (p), qui sont en outre rationnels. Il en est par suite de même de tous les idéaux fractionnaires qui sont des produits des idéaux premiers et de leurs inverses.

Dans un corps principal, la théorie de la divisibilité est analogue à celle du corps des nombres fractionnaires (définis au signe près). Les définitions et les propriétés peuvent être énoncées indifféremment pour les idéaux, ou pour les facteurs associés.

Un facteur α, ou l'idéal (α) est *entier*, si α est un entier du corps [appartenant à $\mathbf{E}(\theta)$].

Un facteur μ *est divisible par un facteur* δ, ou l'idéal (μ) est divisible par l'idéal (δ), *si* $\mu \times \delta^{-1}$ *est un entier du corps.*

Un facteur entier π, est **premier**, lorsqu'il est la base d'un idéal (π) qui est premier; il est équivalent de dire que *le facteur* π *n'a que des diviseurs entiers triviaux*: le facteur 1 (ensemble des diviseurs de l'unité) et le facteur π lui-même (produits d'une de ses valeurs par les diviseurs de l'unité).

On peut alors prendre comme *propriété essentielle* de la divisibilité, le théorème de la décomposition d'un idéal (**17**), en remplaçant idéal par facteur (associé).

Dans un corps principal, *un facteur non nul*, non présumé entier, *est égal à un produit déterminé* (à l'ordre près des facteurs) de *puissances de facteurs premiers différents*, avec des exposants non nuls (positifs et négatifs).

On indique ci-dessous la construction des corps quadratiques principaux, au moins pour des valeurs limitées du discriminant. On donne sommairement ici quelques propriétés arithmétiques de l'un d'entre eux, particulièrement remarquable $\mathbf{R}(i)$, (ensemble des nombres imaginaires à coefficients rationnels). Ces propriétés peuvent être exprimées dans le langage général de la divisibilité mais elles peuvent aussi être interprétées comme des propriétés des nombres entiers rationnels et de leurs expressions possibles en sommes de deux carrés.