13. Propriétés des normes.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1960)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

une base arithmétique, les produits des générateurs $\rho_i \times \sigma_j$, *forment une base arithmétique*, du produit $\mathbf{I} \times \mathbf{J}$:

$$(\ldots,\rho_i,\ldots) \text{ arithmétique} \quad \Rightarrow \quad (\ldots,\rho_i \times \sigma_j,\ldots) \text{ arithmétique.}$$

Il suffit d'utiliser le théorème caractéristique (**9. 5**) des bases arithmétiques. En prenant une base 1 τ, de (1), l'hypothèse est exprimée par l'existence de nombres entiers z_{ir}, tels que:

$$\rho_i \times \tau = \Sigma z_{ir} \times \rho_r; \qquad \text{tout } i \text{ de 1 à } h; \qquad r \text{ de 1 à } h.$$

Cette même condition est alors remplie par les produits, car:

$$(\rho_i \times \sigma_j) \times \tau = (\rho_i \times \tau) \times \sigma_j = \Sigma z_{ir} \times (\rho_r \times \sigma_j); \qquad r \text{ de 1 à } h; \quad \text{tous } i,j.$$

On a déjà utilisé, en fait, un cas particulier de cette construction, en formant une base arithmétique d'un idéal défini par une base algébrique (**10. 4**) (notamment d'un idéal principal, **11. 2**); il est égal à son produit par l'idéal (1), qui peut être défini par une base arithmétique de deux termes $\gamma_1\ \gamma_2$, de sorte que:

$$(\ldots,\rho_i,\ldots) = (\gamma_1,\ \gamma_2) \times (\ldots,\rho_i,\ldots) = (\ldots,\gamma_1 \times \rho_i, \gamma_2 \times \rho_i,\ldots).$$

C'est la base, qui a été justifiée par un raisonnement direct.

Un autre cas particulier d'une telle multiplication est donnée par la forme canonique d'un idéal (**8. 1**), ce qu'expriment les égalités:

$$q \times (m,\ \theta\text{—}c) = (q) \times (m,\ \theta\text{—}c) = (q \times m,\ q \times (\theta\text{—}c)).$$

L'idéal est égal au produit de l'idéal principal (q), de base q, par l'idéal canonique, de base arithmétique m, θ—c, d'où la base arithmétique $q \times m$, $q \times (\theta\text{—}c)$.

13. Propriétés des normes.

On va étudier, plus spécialement, la multiplication d'idéaux, mis sous leur forme canonique, et en déduire des propriétés des normes, qui justifient leur définition, donnée ci-dessus, à priori (**8. 1**).

THÉORÈME des normes. — *Le produit de deux idéaux conjugués est égal à l'idéal principal rationnel, dont une base est leur norme commune* (nombre rationnel positif, défini **8. 1**):

$$\mathbf{I}\times\mathbf{I}' = (\text{norme de } \mathbf{I}) \quad \text{ou} \quad (N(\mathbf{I})).$$

La norme d'un produit d'idéaux est égal au *produit de leurs normes*

$$\text{norme } (\mathbf{I}\times\mathbf{J}) = \text{norme de } \mathbf{I} \times \text{norme de } \mathbf{J}.$$

On peut établir d'abord la première propriété, pour un idéal canonique:

$$\mathbf{M} = (m,\ \theta\text{—}c), \qquad \mathbf{M}' = (m,\ \theta'\text{—}c);$$

une base (arithmétique) du produit $\mathbf{M}\times\mathbf{M}'$ est formée du produit des générateurs:

$$\mathbf{M}\times\mathbf{M}' = (m^2,\ m\times(\theta\text{—}c),\ m\times(\theta'\text{—}c),\ (\theta\text{—}c)\times(\theta'\text{—}c)).$$

Le dernier terme est égal à l'entier rationnel $F(c) = \pm m\times n$, de sorte que m peut être mis en facteur commun:

$$\mathbf{M}\times\mathbf{M}' = m\times\mathbf{E}_1 = (m)\times\mathbf{E}_1; \qquad \mathbf{E}_1 = (m,\ \theta\text{—}c,\ \theta'\text{—}c,\ n).$$

L'idéal $\mathbf{E}_1$ contient les éléments suivants qui sont des entiers rationnels:

$$m, \quad n, \quad \theta\text{—}c+\theta'\text{—}c = S\text{—}2c \equiv c'\text{—}c, \pmod{m},$$

où c' est zéro conjugué de c, de la congruence fondamentale, mod. m. On vérifie qu'ils sont premiers entre eux, en constatant qu'un nombre premier p ne peut les diviser simultanément. Il suffit de se borner à un diviseur p, de m, il divise les entiers $F(c)$, et $F(c')$ qui sont divisibles par m. Alors, *ou bien* p ne divise pas le discriminant du corps, les zéros c et c' de la congruence fondamentale sont distincts et p ne divise pas $c'\text{—}c$. *Ou bien*, il y a une racine double c et c' étant congrus, mod. p; mais alors p^2 ne divise pas $|F(c)| = m\times n$ et p ne divise pas n (propriétés de la congruence fondamentale **4** et **5**).

L'idéal $\mathbf{E}_1$ engendré par des entiers algébriques est entier, comme il contient trois entiers rationnels premiers entre eux, il contient leur p.g.c.d., qui est 1; il contient donc tous les entiers du corps et il est égal à $\mathbf{E}(\theta)$, ou à (1). Donc:

$$\mathbf{M}\times\mathbf{M}' = (m)\times(1) = (m).$$

Le cas général en résulte immédiatement, par application de la *commutativité* et de l'*associativité* de la multiplication:

$$\mathbf{I} = (q)\times(m,\ \theta\text{—}c), \quad \mathbf{I}' = (q)\times(m,\ \theta'\text{—}c);$$
$$\mathbf{I}\times\mathbf{I}' = (q)\times(q)\times(m,\ \theta\text{—}c)\times(m,\ \theta'\text{—}c) = (q^2)\times(m) = (q^2m).$$

La seconde propriété se déduit immédiatement de la première:

$$\text{Norme de } \mathbf{I}\times\mathbf{J} = (\mathbf{I}\times\mathbf{J})\times(\mathbf{I}'\times\mathbf{J}') = (\mathbf{I}\times\mathbf{I}')\times(\mathbf{J}\times\mathbf{J}') = [N(\mathbf{I})]\times[N(\mathbf{J})].$$

Le *carré d'un idéal double* **G** —égal à son conjugué, (**7**)— *est égal à l'idéal principal rationnel*, dont une base est la norme de **G**:

$$\mathbf{G} = q\times(g,\ \theta\text{—}c) = q\times(g,\ \theta'\text{—}c) = \mathbf{G}' \Rightarrow \mathbf{G}^2 = \mathbf{G}\times\mathbf{G}' = (q^2\times g).$$

Les cas particuliers indiqués pour la multiplication entraînent des cas particuliers et des conséquences du théorème des normes.

La *norme d'un idéal principal* (ρ) *est égale à la valeur absolue* $|N(\rho)|$, de la norme de ρ [égale pour les diverses bases possibles, (**11. 1**)], [ceci a déjà été établi par un raisonnement direct pour un idéal canonique, (**11. 3**)]

$$(\rho)\times(\rho') = (\text{norme de } \rho) \Rightarrow \text{norme de } (\rho) = |\text{norme de } \rho|.$$

En particulier la norme d'un *idéal principal rationnel* (q) est égale à q^2.

Un idéal entier **F** *contient sa norme*, puisque son idéal conjugué **F'** étant aussi entier, chacun d'eux contient $\mathbf{F}\times\mathbf{F}'$.

Il n'y a qu'*un idéal entier, de norme* 1, qui est l'*idéal unité*. Car un tel idéal étant contenu dans (1) et contenant (1), lui est égal.

14. Division des idéaux fractionnaires.

DÉFINITION. — *Deux idéaux*, non nuls, *sont* **inverses** —ou chacun d'eux est l'inverse de l'autre— *lorsque leur produit est égal à l'idéal unité* (1).

Les normes d'idéaux inverses sont des nombres inverses, puisque leur produit est égal à la norme de l'idéal (1). Cette remarque, jointe à l'expression du produit de deux idéaux conjugués (**13**), conduit à la construction d'idéaux inverses.