Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 6 (1960)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES CORPS QUADRATIQUES

Autor: Châtelet, A.

Kapitel: 12. Multiplication des idéaux fractionnaires.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-36339

LES CORPS QUADRATIQUES

par A. Châtelet

(suite)

CHAPITRE II

DIVISIBILITÉ DES IDÉAUX

12. Multiplication des idéaux fractionnaires.

Entre les idéaux fractionnaires, d'un corps quadratique, on définit une opération, appelée *multiplication*, dont on vérifie qu'elle est déterminée, commutative et associative, et que l'opération inverse, appelée *division* est possible et déterminée, à l'exception de la division par un idéal nul.

Définition. — *Le* **produit** (résultat de la multiplication) *de deux idéaux*:

$$\mathbf{I} = (..,\rho_i,..), \quad i \text{ de } 1 \text{ à } h; \qquad \mathbf{J} = (..,\sigma_j,..), \quad j \text{ de } 1 \text{ à } k;$$

(définis par des bases algébriques (**10. 1**) de h et k générateurs), *est l'idéal*, désigné par $\mathbf{I}\times\mathbf{J}$, *dont une base algébrique est constituée par les produits mutuels des générateurs*, des idéaux multipliés:

$$\mathbf{I}\times\mathbf{J} = (..,\omega_{ij},..); \qquad \omega_{ij} = \rho_i \times \sigma_j, \quad \text{en nombre } h\times k.$$

Ce produit, qui est ainsi défini, est *déterminé*, c'est-à-dire indépendant des bases adoptées pour définir les idéaux multipliés.

C'est en effet l'ensemble des éléments du corps, de la forme:

$$\Sigma\xi_{ij}\times\omega_{ij} = \Sigma\xi_{ij}\times(\rho_i\times\sigma_j); \qquad \xi_{ij} \in \mathbf{E}(\theta);$$

(les ξ_{ij} étant des entiers arbitraires du corps). Cet ensemble est, par suite égal à l'ensemble des différences (et des sommes) mutuelles des produits de chaque élément de **I** par chaque élément de **J**; ce qui est bien une construction indépendante des bases choisies.

La multiplication est manifestement *commutative*, comme celle des éléments du corps; elle s'étend à un nombre quelconque d'idéaux; elle est *associative*; car les générateurs d'un produit de trois idéaux peuvent s'écrire indifféremment:

$$\omega_{ijk} = (\rho_i \times \sigma_j) \times \tau_k = \rho_i \times (\sigma_j \times \tau_k).$$

La conjugaison conserve la multiplication: *le conjugué d'un produit* (d'idéaux) *est égal au produit des conjugués* (de ces idéaux)

$$(\mathbf{I} \times \mathbf{J})' = \mathbf{I}' \times \mathbf{J}'.$$

Il suffit en effet de définir $\mathbf{I}'$ et $\mathbf{J}'$ par les générateurs conjugués de ceux de $\mathbf{I}$ et $\mathbf{J}$; leurs produits mutuels seront les conjugués des générateurs de définition de $\mathbf{I} \times \mathbf{J}$.

12. 2. *Cas particuliers.*

Le *produit*, d'un idéal $\mathbf{I}$, *par un idéal principal* (ρ) est égal au *produit*, de $\mathbf{I}$, *par* (l'élément de) *la base* ρ (**8. 4**)

$$(\rho) \times \mathbf{I} = \rho \times \mathbf{I};$$

notamment:

$$(0) \times \mathbf{I} = (0); \quad (1) \times \mathbf{I} = 1 \times \mathbf{I} = \mathbf{I}; \quad (\rho) \times (\sigma) = \rho \times (\sigma) = (\rho \times \sigma).$$

L'*idéal unité* (1), ou $\mathbf{E}(\theta)$, est un *élément neutre* pour la multiplication, d'où son nom, on montre ci-dessous (**14**) que c'est le seul.

Le produit $\mathbf{I} \times \mathbf{F}$, *par un idéal entier* $\mathbf{F}$, *est inclus dans* $\mathbf{I}$, car les produits des générateurs de $\mathbf{I}$ par ceux de $\mathbf{F}$, qui sont des entiers du corps, appartiennent à $\mathbf{I}$ (3 de la condition caractéristique; **8. 2**).

Le produit de deux, ou plusieurs, *idéaux entiers* est un *idéal entier*, qui est *inclus dans chacun d'eux.*

12. 3. *Base arithmétique.*

On peut distinguer le cas d'idéaux définis par une base arithmétique (**9. 1**), c'est ce que précise l'énoncé:

Si, dans la multiplication de deux idéaux $\mathbf{I}$ et $\mathbf{J}$, dont les termes des bases sont ρ_i et σ_j, *l'un d'eux*, au moins, *est défini par* *une base arithmétique, les produits des générateurs* $\rho_i \times \sigma_j$, *forment une base arithmétique*, du produit $\mathbf{I} \times \mathbf{J}$:

$$(\ldots,\rho_i,\ldots) \text{ arithmétique} \quad \Rightarrow \quad (\ldots,\rho_i \times \sigma_j,\ldots) \text{ arithmétique.}$$

Il suffit d'utiliser le théorème caractéristique (**9. 5**) des bases arithmétiques. En prenant une base 1 τ, de (1), l'hypothèse est exprimée par l'existence de nombres entiers z_{ir}, tels que:

$$\rho_i \times \tau = \Sigma z_{ir} \times \rho_r; \qquad \text{tout } i \text{ de } 1 \text{ à } h; \qquad r \text{ de } 1 \text{ à } h.$$

Cette même condition est alors remplie par les produits, car:

$$(\rho_i \times \sigma_j) \times \tau = (\rho_i \times \tau) \times \sigma_j = \Sigma z_{ir} \times (\rho_r \times \sigma_j); \qquad r \text{ de } 1 \text{ à } h; \qquad \text{tous } i,j.$$

On a déjà utilisé, en fait, un cas particulier de cette construction, en formant une base arithmétique d'un idéal défini par une base algébrique (**10. 4**) (notamment d'un idéal principal, **11. 2**); il est égal à son produit par l'idéal (1), qui peut être défini par une base arithmétique de deux termes $\gamma_1 \, \gamma_2$, de sorte que:

$$(\ldots,\rho_i,\ldots) = (\gamma_1, \gamma_2) \times (\ldots,\rho_i,\ldots) = (\ldots,\gamma_1 \times \rho_i, \gamma_2 \times \rho_i,\ldots).$$

C'est la base, qui a été justifiée par un raisonnement direct.

Un autre cas particulier d'une telle multiplication est donnée par la forme canonique d'un idéal (**8. 1**), ce qu'expriment les égalités:

$$q \times (m, \theta - c) = (q) \times (m, \theta - c) = (q \times m, q \times (\theta - c)).$$

L'idéal est égal au produit de l'idéal principal (q), de base q, par l'idéal canonique, de base arithmétique m, $\theta - c$, d'où la base arithmétique $q \times m$, $q \times (\theta - c)$.

13. Propriétés des normes.

On va étudier, plus spécialement, la multiplication d'idéaux, mis sous leur forme canonique, et en déduire des propriétés des normes, qui justifient leur définition, donnée ci-dessus, à priori (**8. 1**).