

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 6 (1960)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE SUISSE Conférences et communications

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE SUISSE

Conférences et communications

Séance de printemps 1960 de la Société mathématique suisse et Cinquantième anniversaire de la fondation de la Société

Le cinquantenaire de la fondation de la Société mathématique suisse a été fêté avec une ampleur remarquable à Zurich du 20 au 26 juin 1960, par un Colloque international de géométrie différentielle et de topologie, suivi du Jubilé proprement dit les 25 et 26 juin.

I. *Colloque international de géométrie différentielle et de topologie.*

Sous le patronage de l'Union mathématique internationale et sous la présidence de M. le professeur H. HOPF, de l'E.P.F., plus d'une centaine de mathématiciens venus de divers continents se réunirent à Zurich dans les locaux de l'E.P.F. du 20 au 25 juin 1960, pour présenter divers développements de la géométrie différentielle et de la topologie et discuter des résultats les plus récents. Le premier objectif était atteint par les grandes conférences d'une heure, faites à raison de deux par jour, dont le texte paraîtra soit dans les *Commentarii*, soit dans l'*Enseignement mathématique*. En outre, une cinquantaine d'exposés plus courts (20 minutes), dont certains paraîtront dans les *Commentarii*, s'intercalaien dans la suite ci-dessus, animés par des discussions et controverses très vivantes.

Impossible de citer toutes les personnalités présentes; en règle générale, les auteurs des théorèmes cités par les conférenciers étaient dans l'auditoire. Le mercredi 22 juin vit honorer la mémoire de J. H. C. Whitehead, décédé récemment, auteur de contributions importantes qui nous furent rappelées par M. le professeur HILTON. Le colloque proprement dit prenait fin le vendredi 24 juin.

II. *Fête du Jubilé.*

Le samedi 25 juin 1960, à 10 heures, commençait la fête du Jubilé et voyait l'achèvement solennel du colloque. Dans un auditoire de physique de l'E.P.F. et devant une assemblée imposante formée des mathématiciens du colloque et de nombreux membres de la S.M.S., le président, M. le professeur H. JECKLIN, après quelques mots de

bienvenue, donnait la parole à deux de nos mathématiciens suisses, choisis parmi les plus éminents.

M. le professeur Georges DE RHAM, de l'Université de Lausanne, présentait avec sa clarté coutumière les êtres mathématiques sis au centre des préoccupations du colloque. Puis M. le professeur H. HOPF étalait, en une fresque saisissante, une synthèse des résultats exposés les jours précédents.

Ce même jour à 15 heures, un bateau mis à la disposition de la Société par les autorités zurichoises emmenait les participants sur le lac. Chacun sait à quel point de telles promenades sont favorables aux conversations et échanges de propos scientifiques ou non.

Le dimanche 26 juin, à l'aula de l'Université de Zurich se déroulait la fête du Jubilé, agrémentée par les productions d'un quatuor de cors de l'Orchestre de la Tonhalle.

Dans son discours d'ouverture, M. le président H. JECKLIN salue les participants et particulièrement les membres d'honneur présents : MM. Marchand, Plancherel, Speiser, Hopf et Sacher. Il rappelle ensuite le souvenir des anciens présidents décédés, notamment MM. Fueter, Fehr, Grossmann, Crellier, G. Dumas, S. Dumas, Juvet, Wavre et Kollross. Un salut tout spécial est adressé à M. le professeur Dr Frey, recteur de l'Ecole polytechnique fédérale, à M. le professeur Dr Straumann, recteur de l'Université de Zurich, aux représentants des autorités du canton et de la ville de Zurich, aux délégués de la Société helvétique des Sciences naturelles, de l'Union mathématique internationale, et de la maison d'éditions Orell-Füssli.

M. JECKLIN mentionne les qualités de notre Jubilé, plus intérieures qu'extérieures, et remercie chaleureusement l'organisateur du colloque, M. H. HOPF. Il convient de regretter l'attitude de beaucoup de maisons suisses de l'industrie et du commerce qui n'ont pas voulu s'associer à la réussite matérielle du colloque, ce qui fait estimer d'autant plus l'apport de toutes celles qui ont malgré tout rendu le colloque possible. Le président relève l'importance de la S.M.S. pour la vie mathématique en Suisse, sur le plan des *Commentarii*, sur celui des rencontres internationales, et auprès de la Confédération par l'intermédiaire du Sénat de la S.H.S.N. où notre Société est représentée. Il est nécessaire que l'apport financier de nos autorités aux milieux scientifiques, indispensable aujourd'hui, n'altère en rien la liberté de la recherche, la liberté de publication, et la liberté de la discussion. La Suisse, qui pourrait être en tête du progrès scientifique, ne l'est guère, à cause d'un certain défaitisme de nos autorités. En outre, toute notre structure universitaire est vieillie, tant pour l'enseignement que pour la recherche. Le nombre des professeurs, chargés de cours, assistants, etc., n'a pas augmenté en proportion des nécessités. Les mathématiciens de tout rang étoffent sous la contrainte d'activités administratives ou représentatives, ce qui paralyse bien

inopportunément la recherche. Mais beaucoup, loin de se résigner, restent animés par l'amour de la science et par le feu de la recherche, si modestes et désagréables que soient leurs conditions de travail. Puisse cette ardeur s'épanouir encore au sein de la S.M.S.

Le président donna ensuite la parole à M. le professeur M. PLAN-CHEREL. Le texte de la conférence de ce dernier figurera dans l'*Enseignement mathématique*: « Mathématiques et mathématiciens en Suisse (1850-1950) ».

Finalement, et aux acclamations de l'Assemblée, furent élus membres d'honneur de la Société mathématique suisse les professeurs Jean LERAY, de Paris, membre de l'Institut; Hassler WHITNEY, de Princeton, et Georges DE RHAM, de Lausanne.

Le Jubilé prit fin par un banquet au Kongresshaus au cours duquel de nombreux orateurs se firent entendre, les délégués des sociétés scientifiques notamment.

Les participants et la Société doivent une gratitude toute spéciale aux organisateurs, notamment MM. H. HOPF, H. JECKLIN, B. ECKMANN, H. KUENZI, grâce auxquels aucun point ne fut négligé pour la réussite tant du Colloque que du Jubilé.

*49^e assemblée annuelle de la Société mathématique suisse à Aarau,
le 24 septembre 1960, dans le cadre de la 140^e assemblée annuelle
de la Société helvétique suisse.*

Président: Prof. Dr H. JECKLIN, Université de Zurich.

Vice-président: Prof. Dr B. ECKMANN, E.P.F., Zurich.

Secrétaire: Prof. J. DE SIEBENTHAL, EPUL, Lausanne.

M. H. JECKLIN, président, salue les participants, relativement nombreux, et donne la parole à M. le Dr H. RAMSER, recteur de l'Ecole cantonale d'Aarau, qui prononce quelques mots de bienvenue.

1. Séance administrative.

M. le président renseigne l'assemblée sur la marche de la S.M.S.

Membres admis en 1960: Chr. BLATTER, Basel; H. BÜHLMANN, Zurich; F. W. GEHRING, Ann Arbor, U.S.A.; W. HOLENWEG, Luzern; P. JEANQUARTIER, Lausanne; J.-P. ROBERT, Neuchâtel; Th. A. SCHOEN, Dayton, Ohio, U.S.A.

Membres décédés: MM. W. GAUTSCHI, E. GUILLAUME, H. RUCH, G. VALIRON.

M. B. ECKMANN, vice-président, donne connaissance des comptes de la Société pour l'année 1959, qui sont approuvés. Décharge est donnée au caissier et aux vérificateurs pour 1959. Le vice-président donne ensuite divers renseignements sur l'activité mathématique

dans le monde; le Congrès international aura lieu à Stockholm du 15 au 22 août 1962.

M. le professeur Dr J. J. BURCKHARDT rapporte sur la marche des *Commentarii Mathematici Helvetici*, qui est satisfaisante.

2. La partie scientifique a été consacrée aux communications suivantes:

1. H. BIERI (Bern): *Beitrag zum Reinhardschen Problem.*

Das genannte Problem besteht darin, unter allen (konvexen) Polygonen der euklidischen Ebene mit vorgegebener Eckenzahl und ebensolchem Durchmesser ($d - 1$) dasjenige mit dem grössten flächensinhalt F aufzufinden.

Das Problem ist gelöst für ungerade Eckenzahl, wo das reguläre n -Eck extremal ist, ungelöst für gerade Eckenzahl, falls $n > 4$. Es konnte nun für den nächsthöheren fall mit $n = 6$ wenigstens eine Teillösung aufgefunden werden, nämlich für die abgeschlossene Teilklasse der achsensymmetrischen Sechsecke. Das Polygon mit grösstem flächensinhalt, Mitglied einer einparametrischen Schar mit einer auf einem Durchmesser senkrecht stehenden Diagonalen a als Parameter, besitzt folgende Eigenschaften:

1. Es hat 6 Durchmesser, also die Maximalzahl. Bezeichnet man die auf der Symmetrieachse liegenden Ecken mit 1 und 4, so sind ausser $\overline{14}$ die Diagonalen $\overline{24}, \overline{25}, \overline{36}, \overline{46}, \overline{35}$ Durchmesser.
2. Die Diagonale $\overline{26} = a$, das Intervall $0 \leq a \leq 1$ durchlaufend, hat den Wert $a^* \sim 0,687543\dots$
3. Es gilt:

$$F(a) = \frac{1}{4}[2a + (1-a)\sqrt{4-a^2} + a\sqrt{4-(1+a)^2}],$$

und im zulässigen Intervall $0 \leq a \leq 1$ erreicht F genau einmal das Maximum $F^* \sim 0,67498144\dots$, welcher Wert die bisher bekannte obere Schranke $\bar{F} \sim 0,696264\dots$ recht erkeblich unterbietet.

Das gefundene Sechseck bleibt jedenfalls auch in der vollen Klasse aller Sechsecke extremal!

2. W. HOLENWEG, Wolhusen: *Über die Ordnung der Burnside-Gruppen mit zwei Erzeugenden.*

Eine Gruppe mit dem Exponenten p und einer endlichen Anzahl q von Erzeugenden heisst Burnside-Gruppe. Novikoff hat für $p > 72$ gezeigt, dass jede solche Burnside-Gruppe unendlich ist.

Wir gehen von der freien Gruppe G der Klasse ω aus; d.h. $G_{\omega+1} = 1$.

Die Faktorgruppe G_h/G_{h+1} ist frei abelsch und hat nach Witt d_h^q Erzeugende (G_h : h -tes Glied der absteigenden Zentralreihe von G ; q : Anzahl der freien Erzeugenden von G). Ist L freie Gruppe mit dem Exponenten p und der Klasse k ($k \leq w$), so ist L_h homomorphes Bild von G_h . L_h/L_{h+1} ist elementare abelsche Gruppe und besitzt $d_{h,p}^q$ Erzeugende. Wir setzen mit Ph. Hall $d_{h,p}^q = d_h^q - \delta_h^q$. Dabei wird δ_h^q als Dimensionsdefekt bezeichnet. Lässt sich eine Methode entwickeln, die gestattet sämtliche Dimensionsdefekte zu berechnen, so kann die Struktur der Burnside-Gruppen angegeben werden.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, wie man sämtliche Dimensionsdefekte δ_{p+n}^2 für $n \leq p - 2$ bestimmen kann. Dabei ergeben sich auch die von Lyndon im Gruppenring berechneten Werte δ_p^q , δ_{p+1}^q . Zur Bestimmung der Dimensionsdefekte führt der Hauptsatz:

« Für zwei Erzeugende, das Gewicht $c = p + n$ und $n \leq p - 2$ wird die Defektgruppe genau durch die verschiedenen Relationen erzeugt, welche Basiskommutatoren vom Gewicht p in ihren Erzeugenden enthalten. »

Der Beweis dieses Satzes stützt sich zur Hauptsache auf eine Abbildung innerhalb der geordneten Reihe der Basiskommutatoren.

Die Arbeit erscheint demnächst unter dem Titel: « Die Dimensionsdefekte der BURNSIDE-Gruppen mit zwei Erzeugenden » in den *Commentarii Mathematici Helvetici*.

3. J. O. FLECKENSTEIN and B. MARZETTA (Basel): $\sqrt{3}$ bei Archimedes.

Bekanntlich hat unter den vielen Rekonstruktionsversuchen des von Archimedes in seiner Κύκλου μέτρησις ohne Ableitung gegebenen Näherungswertes

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

bei der Exhaustion des Kreises vermittelst des regulären 6^n -Ecks den meisten Anklang die Hypothese von Hultsch (1893/94) gefunden. Aus der von Heron (*Metrika*, I, Cap. 8) übermittelten Näherungsformel für quadratische Irrationalitäten

$$a \pm \frac{b}{2a \pm 1} < \sqrt{a^2 \pm b} < a \pm \frac{b}{2a}$$

erhält man nämlich — ausgehend von $a = 2$ und $b = 1$ — nach drei « iterationsartigen » einfachen aber nicht trivialen Schritten die Schranken des Archimedes. Selbst in dieser « Iteration » haben C. Müller und O. Toeplitz (1933) noch ein tieferliegendes Verfahren

zu erkennen geglaubt, welches auf die pythagoreisch-platonische Proportionenlehre zurückweist.

Inzwischen sind Keilschrifttexte bekanntgeworden, welche zeigen, dass die Heronische Näherung schon Altbabylon bekanntgewesen ist; die seleukidische Epoche kannte dann später sogar die Technik des Radizierens vermittelst der Interpolation in Reziprokentafeln. Bruins (1948/49) hat nun aus dem altbabylonischen Text VAT 6598 die Heronische Näherung in ihrer primordialen Form

$$a - \frac{b^2}{2a-b} < \sqrt{a^2-b^2} < a - \frac{b^2}{2a}$$

eruiert. und auf den antiken Näherungswert für $\sqrt{2}$ angewendet.

Wendet man nun diese Form der Näherung für quadratische Irrationalitäten auf $\sqrt{3}$ an, so erhält man die Archimedische Näherung direkt — ohne jegliche Iteration — wenn man nur 3 in sexagesimalen Einheiten bis auf die Sekunden schreibt. Dann ist nämlich

$$3 = \frac{10800}{3600} = \frac{104^2 - 4^2}{60^2} \quad \text{und die Formel liefert für } a = 104, b = 4 \text{ sofort}$$

$$\frac{1}{60} \cdot \frac{5300}{51} < \frac{1}{60} \sqrt{10800} < \frac{1}{60} \cdot \frac{1351}{13} \text{ oder } \frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

Obwohl Archimedes im $\psi\alpha\mu\mu\acute{\iota}\tau\eta\varsigma$ dekadisch rechnet, muss ihm die sexagesimale Rechnung der zeitgenössischen Astronomen geläufig gewesen sein. Da in diesem System der Näherungswert für $\sqrt{3}$ aus der damals altbekannten babylonischen Rechenformel direkt ohne jede Zwischenrechnung folgt, hat Archimedes eine Ableitung seines Näherungswertes zu geben nicht für nötig gehalten. Sein Schweigen scheint uns daher keineswegs ein besonderes Verfahren zu verdecken, sondern nur eine Selbstverständlichkeit auszudrücken.

4. P. NOLFI (Zürich): *Mathematische Analyse des Jass-Spieles.*

Einleitung: In den nachstehenden Ausführungen werden die Grundregeln des Jass-Spieles als bekannt vorausgesetzt. Wer dieses Spiel noch nicht kennen sollte, dem ist zu empfehlen, es zu erlernen. Es handelt sich um ein schönes aber auch instruktives Spiel. Man lernt, wie man die Karten, die einem durch den Zufall zugeteilt werden, am besten einsetzen kann. Das ist eine gute Uebung, denn im täglichen Leben kommt es auch darauf an, dass man seine Kräfte so gut wie möglich einsetzt.

Wer für das Jass-Spiel Interesse hat, kaufe das Schweizerische Jass-Reglement. Darin findet er die Grundregeln und die Verhaltungs-

vorschriften. Da es mehrere Spielarten gibt, wie den Aucho, den Hindersi usw. haben wir unsere Ausführungen möglichst allgemein gehalten; im speziellen beziehen sie sich auf den Schieber, der wohl am bekanntesten sein dürfte. Das Spiel besteht — um es kurz in Erinnerung zu rufen — aus 36 Karten, unterteilt in vier Sorten (Farben genannt), nämlich: Schaufel, Eckstein, Herz und Kreuz bzw. Schilten, Schellen, Rose und Eichel beim deutschen Spiel. Die 9 Karten einer Farbe heissen nach ihrem Stichwert geordnet: As (11), König (4), Dame (3), Bub (2), Trumpfbub (20), Zehner (10), Neuner (0), Nell (14), Achter (0), Siebner (0), Sechser (0). Die in Klammern angeführten Ziffern geben die Punktzahl an bei der Auswertung des Erlöses. Die Summe aller Punktzahlen: $4 \cdot 11 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 20 + 4 \cdot 10 + 14 = 152$ ergibt zusammen mit den 5 Punkten für den letzten Stich 157.

Der Weis: Die Karten werden gemischt und zu je dreimal drei verteilt. Jeder der vier Spieler erhält 9 ihm vom Zufall zugeteilte Karten. Dabei werden gewisse Zusammensetzungen, insgesamt 78 einschliesslich Stöcke, prämiert. Drei Karten gleicher Farbe und in der Reihenfolge gelten 20, vier 50, fünf 100, 4 Asse, 4 Könige oder 4 Damen oder 4 Zehner 100, vier Buben sogar 200, König und Dame der Trumpfkarten 20 Punkte.

Für den Mathematiker entsteht zunächst die interessante Aufgabe, die Häufigkeit zu berechnen, mit der diese besonderen Ereignisse sich einstellen. Zunächst ist es einfach, die Wahrscheinlichkeit für 4 Asse, 4 Könige, 4 Damen, 4 Buben oder 4 Zehner zu berechnen. Bezeichnet man allgemein mit n die Zahl der Karten, mit r die Zahl der einem Spieler zukommenden Karten, so gibt es für ihn insgesamt $\binom{n}{r}$ unterschiedliche Möglichkeiten der Zuteilung. Werden nun nur diejenigen Austeilungen berücksichtigt, die Δ bestimmte Karten enthalten, so gibt es deren $\binom{n-\Delta}{r-\Delta}$ unterschiedliche Möglichkeiten.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit wird $w_{\Delta} = \binom{n-\Delta}{r-\Delta} : \binom{n}{r}$.

Für $n = 36$, $r = 9$ und $\Delta = 4$ erhält man $w_4 = 0,0021$.

Ein Spieler hat also auf 468 Kartenverteilungen die Chance, einmal 4 Könige zu erhalten, irgendeiner der Spieler auf 117 Kartenverteilungen. Da es insgesamt 5 solche Weise gibt (4 Asse, 4 Könige, 4 Damen, 4 Buben, 4 Zehner), erscheint irgendeines dieser Ereignisse im Durchschnitt auf rund 25 Verteilungen. Etwas schwieriger zu berechnen ist die Häufigkeit der Weise aus Folgeblättern (z.B. As, König, Dame), also der Punktzahlen 20 bei 3 Karten, 50 bei 4 Karten und 100 bei 5 Karten. Hier ist es so, dass auch bei gleicher Kartenzahl nicht alle Weise gleich oft erscheinen. Das Dreiblatt As-König-Dame

tritt häufiger auf als z.B. König-Dame-Bub. Es erscheint paradox, doch ist zu beachten, dass ein Dreiblatt nur dann entsteht, wenn keine Anschlusskarte vorausgeht oder nachfolgt. Nun kann das Dreiblatt As-König-Dame nur nach einer Seite hin, nämlich durch den Buben zu einem Vierblatt ergänzt werden, während beim Dreiblatt König-Dame-Bub diese Möglichkeit nach beiden Seiten hin besteht. Im ersten Falle gilt die Formel:

$$\omega_3/ = \omega/3 = \binom{n-\Delta-1}{r-\Delta} : \binom{n}{r}.$$

$$\text{Im zweiten Fall dagegen } \omega/3/ = \binom{n-\Delta-2}{r-\Delta} : \binom{n}{r}.$$

Für $n = 36$, $r = 9$ und $\Delta = 3$ erhält man $\omega_3/ = \omega/3 = 0,0018$ bzw. $\omega/3/ = 0,0015$. Der Erwartungswert, mit der die Weisung von 20 Punkten auftritt, beträgt (immer auf zwei Stellen genau) $E_3 = 0,23$ pro Spieler und 0,93 auf jede Kartenverteilung (Partie). Es können somit im Durchschnitt fast nach jeder Verteilung 3 Blatt gewiesen werden. — Nach dem gleichen Vorgehen kann die Häufigkeit für 4 Folgekarten berechnet werden. Der Erwartungswert $E_4 = 0,04$. Derjenige für das Auftreten von 5 Karten beträgt $E_5 = 0,005\dots$. Der Erwartungswert für irgendeinen Weis stellt sich auf 0,34 pro Spieler. Der durchschnittliche Wert eines Weises beläuft sich auf 28 Punkte. Er kann indessen nicht voll angerechnet werden, weil die Gegner mitunter zu überbieten vermögen. — Sehr selten tritt das Neunblatt auf, d.h. der Fall, dass ein Spieler alle 9 Karten der gleichen Farbe zugeteilt erhält. Er kann beim Zuger mit 300 Punkten als der « Grosse Weis » angerechnet werden. Seine Wahrscheinlichkeit beträgt pro Partie $0,000\,000\,17$ oder $17 \cdot 10^{-10}$.

Die Möglichkeiten eines Spielverlaufs: Den Spieler interessiert insbesondere, zu wissen, ob Möglichkeiten bestehen, gewisse Verhaltungsregeln anzugeben, wie man am vorteilhaftesten spielen soll. Diese Frage kann grundsätzlich bejaht werden. Abgesehen von den praktischen Schwierigkeiten besteht tatsächlich die Möglichkeit, Richtlinien anzugeben, um im Einzelfall ein möglichst gutes Ergebnis zu erzielen. Aber die Gewinnung dieser Richtlinien erfordert einen unheimlichen Arbeitsaufwand und ist wohl nie zu bewältigen. Dagegen lassen sich bei derartigen Betrachtungen gewisse Einsichten gewinnen, die sehr interessant sind. — Man denkt sich dazu am besten einen Registrator, dem die Aufgabe zukommt, jedes Spiel zu registrieren. Angenommen es wäre ihm möglich, alle Fälle einzutragen und diejenigen zu streichen, die nicht gut sind, dann müssten von jeder Kartenverteilung die bestmöglichen zurückbleiben. — Betrachten wir den Verlauf aller Partien: Sie beginnen mit der Verteilung

der Karten. 36 Karten können auf 4 Spieler zu je 9 Karten, insgesamt auf

$$\alpha = \frac{36!}{9!9!9!} = 21\,452\,752\,266\,265\,320\,000$$

oder auf rund $21,5 \cdot 10^{18}$, das sind 21,5 Trillionen unterschiedliche Arten verteilt werden. Man kann sich nun alle diese Fälle numeriert denken, so dass der Registrar jedesmal bei jeder Verteilung angeben kann, welcher von den 21,5 Trillionen Fällen tatsächlich eingetreten ist.

Nach erfolgter Verteilung hält jeder Spieler 9 Karten in der Hand. In einer ersten Runde legt jeder Spieler eine Karte auf den Tisch. Dazu bestehen — abgesehen vor den Vorschriften über das Ausspielen der Karten — für jeden Partner 9 Möglichkeiten, insgesamt also 9^4 . Zu Beginn der zweiten Runde hat jeder Spieler 8 Karten in der Hand und damit bestehen 8^4 Möglichkeiten für die Abgabe einer weiteren Karte. Insgesamt erhält man nach dieser Rechnung $\beta = (9!)^4$ oder rund 17.340 Trillionen ($17,3 \cdot 10^{21}$) Möglichkeiten. Das Produkt mit der Zahl der Verteilungen ergibt die obere Grenze für die Zahl der Partien. Sie beträgt $\delta = \alpha \cdot \beta = 36 (9!)^3$ und erreicht rund $37,2 \cdot 10^{40}$ oder 372'000 Sextillionen. Diese Zahl ist zwar noch lange nicht unendlich, aber für irdische Verhältnisse überaus gross. Zum Vergleich sei angeführt, dass der Durchmesser der Milchstrassenlinse « nur » $760 \cdot 10^{18}$ d.h. 760 Trillionen Meter misst. Es kann mit Sicherheit angenommen werden, dass noch lange nicht alle Möglichkeiten durchgespielt wurden.

Die Entropie: Besondere Bedeutung kommt bei den Kartenspielen der Information zu. Wüsste ein Spieler von Anfang an, wie die Karten verteilt sind, könnte er sich viel besser verteidigen. Vor der Kartenverteilung schwebt der Spieler vollständig im Ungewissen, was er selbst für Karten erhalten wird. Nach der Verteilung ist er zwar über die eigenen Karten genau informiert, dagegen ist ihm unbekannt, was für Karten seine Mitspieler erhalten haben; d.h. über die tatsächliche Verteilung ist er nur teilweise orientiert. Insgesamt sind bei gleichen Handkarten eines Spielers noch $\frac{(27!)}{(9!)^3}$ oder rund 4,7 Millionen Fälle möglich.

Die Gesamtheit aller dieser Fälle bildet den Informationsbereich des Spielers. Nach der Kartenverteilung kann jeder Spieler somit lediglich feststellen, in welchem Informationsbereich er sich befindet. Der Durchschnitt aller 4 Informationsbereiche ergibt den tatsächlichen Ort, dieser ist aber den einzelnen Spielern bei Beginn des Auspielens unbekannt. Wenn wir die Entropie des Spieles mit

$$H = - \sum_1^\alpha p_k^\alpha \lg p_k$$

definieren, so ist diese anfänglich gleich eins: $H = 1$. Nach der Verteilung geht die Unkenntnis über die Kartenverteilung stark zurück, die Entropie beträgt nur noch 0,59. Sie sinkt entsprechend der Abnahme an Unkenntnis mit jeder Runde (Abgabe von 4 Karten) und beträgt z.B. nach der zweiten Runde 0,44, nach der 5. Runde 0,23 und nach der 8. Runde 0,04. Nach der Abgabe der letzten Karte ist die Entropie Null. Jeder Spieler ist genau orientiert, wie die Karten verteilt waren, sofern er den Spielverlauf verfolgt hat. Man sieht hieraus, dass die Information im Laufe einer Partie zunimmt und erst am Ende derselben vollständig ist, d.h. erst, wenn es zu spät ist. Aus dieser Eigenart des Jass-Spieles entstehen viele Streitigkeiten. Namentlich wenn Zuschauer anwesend sind. Diese sind dann von Anfang an vollständig orientiert, weil sie auch in die Karten der Mitspieler blicken und darum auch besser wissen können, wie der einzelne Partner spielen *sollte*. Sie sind sich jedoch meistens ihrer besseren Situation nicht bewusst und meinen ganz zu Unrecht, sie hätten es besser gemacht. Zuschauer sind deshalb unerwünscht.

Die Strategie: Die Chancen bei einem Kartenspiel hängen aber nicht nur von der Verteilung ab, also vom Zufall, sondern auch von der Geschicklichkeit, mit der ein Spieler seine Karten ausspielt. Gute Spieler wissen, dass es sehr darauf ankommt, und treffen schon bald nach der Kartenverteilung den Entscheid über die Reihenfolge für das Ablegen der Karten. Sie fassen eine bestimmte *Strategie* ins Auge und erreichen damit meistens gute Resultate. Da jeder Partner zu Beginn des Ausspielens 9 Karten in der Hand hält, stehen ihm insgesamt 9(!) Strategien zur Auswahl. Das Studium dieser Strategien würde zweifellos wertvolle Erkenntnisse zu Tage fördern. Das folgt aus der Tatsache, dass der Registratur (abgesehen von der praktischen Durchführbarkeit) grundsätzlich immer die Möglichkeit hat, jedem Spieler zu sagen, welche Strategie für ihn die beste ist. Für den Registratur ist nämlich die Information von Anfang an vollständig, da er genau feststellen kann, welche Verteilung tatsächlich vorliegt. Er steht also vor einem Spiele mit vollständiger Information und für solche hat Neumann gezeigt, dass sie immer eine Lösung d.h. für jeden Spieler eine optimale Strategie besitzen.

Bei einem Jass-Spiel mit aufgedeckten Karten hätte nämlich jede Spielpartei die Möglichkeit, ihre $(9!)^2$ eigenen sowie die ihr bekannten $(9!)^2$ gegnerischen Strategien in einem Quadrat mitsamt den Ergebnissen einzutragen und die Gleichgewichtspunkte aufzusuchen. Das gäbe allerdings ein sehr grosses Quadrat mit rund 5 Millionen Eingängen auf beiden Seiten, und zwar für jede der 21,5 Trillionen Möglichkeiten.

Aus dieser wichtigen Vorarbeit liessen sich dann auch Anhaltspunkte gewinnen für das eigentliche Spiel, indem man für alle möglichen Kartenzuteilungen an einen Spieler aus den ihm zustehenden Strategien die wahrscheinlich beste herausliest. — Wegen der grossen

Zahl der Fälle erscheint ein solches Programm vollständig undurchführbar. Es ist aber doch denkbar, dass durch Beschränkung auf reduzierte Spiele, z.B. mit nur 12 statt 36 Karten sich Anhaltspunkte ergeben würden. Jedenfalls gibt es hier interessante Probleme.

5. Joseph HERSCH (Institut Battelle, Genève): *Le principe de Thomson comme corollaire de celui de Dirichlet.*

1. Considérons, par exemple, *un problème de Poisson* dans un domaine G du plan, de frontière Γ : $\Delta u = -\rho(x, y)$ dans G , $u = 0$ sur Γ . On s'intéresse à l'intégrale de Dirichlet $D(u) = \iint_G \text{grad}^2 u \, dA = \iint_G \rho u \, dA$, où dA est l'élément d'aire. — Ce problème est celui d'une membrane (à contour fixé) en équilibre, sous l'action d'une pression $\rho(x, y)$. Pour une déflexion quelconque $v(x, y)$, l'énergie potentielle est $\frac{1}{2} D(v) - \iint \rho v \, dA$; celle-ci est minimale pour $v = u(x, y)$, satisfaisant à l'équation d'Euler $\Delta u = -\rho$. Le *principe de Dirichlet* $D(u) = \text{Max}_{v=0 \text{ sur } \Gamma} \{ 2 \iint \rho v \, dA - D(v) \}$ n'est autre que le principe du minimum de l'énergie potentielle.

2. La forme classique du *principe de Thomson* est la suivante:

$$(1) \quad D(u) = \text{Min}_{\text{div } \vec{p}} = -\rho \iint_G \vec{p}^2 \, dA$$

On a alors le contraste:

- *Dirichlet*: Les fonctions concurrentes v satisfont aux conditions aux limites, mais non pas à l'équation différentielle.
- *Thomson*: Les champs vectoriels concurrents \vec{p} satisfont à l'équation différentielle, *mais non pas aux conditions aux limites*.

3. *J'interprète le principe de Thomson comme conséquence de celui de Dirichlet pour 1 dimension.* — Découpons un exemplaire G_a de la membrane en lanières horizontales de largeur infinitésimale, un second exemplaire G_b en lanières verticales; décomposons la pression ρ en ρ_a (agissant sur G_a) et ρ_b (agissant sur G_b): $\rho_a + \rho_b = \rho(x, y)$. Appelons $f(x, y)$ la solution dans G_a , $g(x, y)$ la solution dans G_b ; f et g s'annulent sur Γ ; f est continue en x , deux fois dérivable par rapport à x et satisfait $f_{xx} = -\rho_a(x, y)$; g est continue en y , etc., et $g_{yy} = -\rho_b(x, y)$; cette paire de solutions (f, g) réalise le minimum de l'énergie potentielle (principe de Dirichlet pour 1 dimension):

$$-\frac{1}{2} \iint (f_x^2 + g_y^2) \, dA = \text{Min}_{\varphi, \psi} \left[\frac{1}{2} \iint (\varphi_x^2 + \psi_y^2) \, dA - \iint (\rho_a \varphi + \rho_b \psi) \, dA \right]$$

avec $\begin{cases} \varphi \text{ continue en } x, \text{ etc.}, \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma \\ \psi \text{ continue en } y, \text{ etc.}, \psi = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$;

or la paire de fonctions $\varphi = \psi = u(x, y)$ est concurrente, d'où

$$(2) \quad \boxed{D(u) \leq \iint_G (f_x^2 + g_y^2) dA.}$$

On choisira souvent non pas ρ_a et ρ_b , mais bien $f(x, y)$ continue en x , etc. et $g(x, y)$ continue en y , etc. ($f = g = 0$ sur Γ), satisfaisant à la *condition*

$$(3) \quad f_{xx} + g_{yy} = -\rho(x, y);$$

on aura alors la borne (2), avec l'égalité si $f = g = u$.

C'est le principe de Thomson pour le champ vectoriel $\{f_x, g_y\}$.

4. *Démonstration directe*: $f = u + s; g = u + t; s = t = 0$ sur Γ ; $s_{xx} + t_{yy} = 0$ dans G ; $f_x^2 + g_y^2 = \text{grad}^2 u + s_x^2 + t_y^2 + 2(us_x)_x + 2(ut_y)_y - 2u(s_{xx} + t_{yy})$; le dernier terme s'annule, et (2) s'ensuit par intégration.

5. Soit $\vec{p} = \{p_1, p_2\}$ un champ vectoriel concurrent: $p_{1x} + p_{2y} = -\rho$; appelons $f(x, y)$ et $g(x, y)$ les solutions de $\{f = g = 0$ sur Γ , $f_{xx} = p_{1x}, g_{yy} = p_{2y}\}$; on vérifie aisément

$$(2') \quad D(u) \leq \iint_G (f_x^2 + g_y^2) dA \leq \iint_G \vec{p}^2 dA.$$

La borne (2) est toujours préférable (ou égale) à celle (1) du principe classique de Thomson: *L'effacement des conditions aux limites* (forme vectorielle du principe) est permis, mais n'est pas fructueux! Il affaiblit l'évaluation.

6. Application: *Rigidité à la torsion* P d'une barre prismatique de profil G simplement connexe. — on a ici $\rho(x, y) \equiv 2$ et $P = D(u) = 2 \iint u dA$.

Appelons L_x la longueur d'un segment $\overrightarrow{|x|}$ dans G , à extrémités sur Γ ; définissons $\overset{\sim}{M_x} = \int_G L_x^3 dy$ et $\overset{\sim}{M_y} = \int_G L_y^3 dx$; si nous choisissons $f_{xx} \equiv -c$ et $g_{yy} \equiv c - 2$, (3) est satisfaite et (2) donne $P \leq \frac{1}{12} \left[c^2 \overset{\sim}{M_x} + (2 - c)^2 \overset{\sim}{M_y} \right]$; optimalisons c , nous obtenons

$$(4) \quad P \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{\overset{\sim}{M_x} \overset{\sim}{M_y}}{\overset{\sim}{M_x} + \overset{\sim}{M_y}}; \quad \text{le choix des axes } \vec{x}, \vec{y} \text{ reste libre.}$$

Cette borne est *toujours préférable* (ou égale) à la borne connue

$$(4') \quad P \leq \frac{4 I_1 I_2}{I_1 + I_2} \quad (I_1 \text{ et } I_2 = \text{moments d'inertie principaux}),$$

fournie par (1) avec le champ $\vec{p} = \{-cx; (c-2)y\}$ lorsqu'on optimalise c .

7. *Exemple: Rectangle de côtés $a \geq b$:*

Avec des axes \vec{x} et \vec{y} inclinés à 45° , (4) donne $\frac{P}{ab^3} \leq \frac{1}{3} \left(1 - \frac{b}{2a}\right)$;

$$(4') \quad \text{donne } \frac{P}{ab^3} \leq \frac{1}{3} \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)^{-1}.$$

Rapport a/b	4	8	12	100	∞
$\frac{P}{ab^3}$	Valeur exacte	0,2808	0,3071	0,3158	0,3312
	Borne supérieure (4)	0,2917	0,3125	0,3194	0,3317
	Borne «classique» (4')	0,3137	0,3282	0,3310	0,3333

Remarque: La borne classique (4') est insensible à toute «fissure» dans le profil, tandis que la borne (4) en tient compte.

7a. S. PICCARD (Neuchâtel): *Des problèmes de la Théorie générale des groupes.*

Soit G un groupe multiplicatif libre et soit A un système de générateurs libres a_λ , $\lambda \in \Lambda$, de G . Chaque élément a de G peut, comme on sait, être mis de façon unique sous forme d'une composition finie réduite d'éléments de A . Soit $a = f(a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}, \dots, a_{\lambda_k})$. a possède donc un degré fixe par rapport à tout élément de A , ce degré par rapport à a_{λ_i} étant la somme des exposants de a_{λ_i} dans f , $i = 1, 2, \dots, k$, et 0 par rapport à tout autre élément de A . a possède également un degré fixe par rapport à l'ensemble des éléments de A , ce degré étant la somme des degrés de a par rapport aux divers éléments de A . En se basant sur cette remarque, on peut décomposer d'une infinité de façons les éléments de G en classes disjointes ayant un caractère intrinsèque et qui constituent les éléments d'un treillis de groupes abéliens associés à G . L'étude de ce treillis permet d'établir, de façon nouvelle et très simple, de nombreuses propriétés de structure des groupes libres. Elle se prête tout particulièrement à la recherche des

sous-groupes invariants de G et à celle des éléments de G dits « libres ». On peut aussi décomposer G en classes d'équivalence qui n'ont pas un caractère intrinsèque, indépendant du système A de générateurs libres à partir desquels elles sont définies, classes qui à leur tour forment les éléments de groupes abéliens associés à G . Si A est fini, l'élément neutre de ces derniers groupes est un sous-groupe d'index fini de G et on peut rapidement faire le tour des sous-groupes d'index fini de tout groupe libre ayant un nombre fini de générateurs libre par l'examen de ces classes et en utilisant des résultats classiques de la théorie des nombres.

Les groupes libres ne sont pas les seuls à jouir de cette propriété que chacun de leurs éléments possède un degré fixe par rapport à tout élément libre de G ainsi que par rapport à l'ensemble des éléments de tout système de générateurs libres. Ils font partie d'une classe plus générale de groupes que nous avons appelés quasi libres et dont on peut donner les deux définitions équivalentes suivantes : Un groupe multiplicatif G est quasi libre s'il possède un système A de générateurs tel que tout élément a de G possède un degré fixe par rapport à tout élément de A , ce degré étant défini de la façon suivante. A étant un système générateur de G , tout élément a de G peut être obtenu par composition finie d'éléments de A , plusieurs compositions distinctes pouvant représenter le même élément, mais chacune de ces compositions ayant le même degré par rapport à a_λ , quel que soit l'élément a_λ de A . Ce degré est, par définition, le degré de a par rapport à a_λ . Tout élément d'un groupe quasi libre a également un degré fixe par rapport à l'ensemble des éléments de A , ce degré étant par définition la somme des degrés de a par rapport à tous les éléments de A . Si A est infini, a peut être de degré non nul seulement par rapport à un nombre fini d'éléments de A . Les éléments d'un tel système de générateur de G sont dits quasi libres et le système de générateurs A est irréductible en ce sens que quel que soit le sous-ensemble fini A^* de A il n'existe pas de sous-ensemble B^* de G , de puissance inférieure à celle de A^* et tel que tout élément de A^* puisse être obtenu par composition finie des éléments de l'ensemble B .

D'autre part, on peut définir un groupe quasi libre G par un ensemble A d'éléments générateurs liés par une famille F de relations *quasi triviales*. Une relation $f(a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}, \dots, a_{\lambda_k}) = 1$ entre des éléments de A est dite quasi triviale si son premier membre est de degré nul par rapport à tout élément de A .

Tout groupe libre est quasi libre mais la réciproque n'est pas vraie et il existe une infinité de groupes quasi libres qui ne sont pas libres.

On peut décomposer d'une infinité de façons les éléments d'un groupe quasi libre en classes d'équivalence ayant un caractère

intrinsèque indépendant de la base A de G . A partir de ces décompositions, on définit un treillis de groupes abéliens associés à G et qui permettent de résoudre de nombreux problèmes de structure de G . C'est ainsi qu'on peut démontrer que tout groupe quasi libre possède une infinité de sous-groupes invariants et si le groupe quasi libre G est de puissance infinie \mathfrak{m} , l'ensemble de ses sous-groupes invariants est de puissance supérieure à \mathfrak{m} . Tout sous-groupe d'un groupe quasi libre n'est pas quasi libre. Il existe même des groupes quasi libres à un nombre fini de générateurs qui possèdent des sous-groupes à une infinité de générateurs et qui sont dépourvus de bases, c'est-à-dire de systèmes irréductibles de générateurs. Tout groupe quasi libre engendré par un ensemble de puissance \mathfrak{m} de générateurs quasi libres possède un ensemble de puissance $> \mathfrak{m}$ de sous-groupes quasi libres. Tout sous-groupe quasi libre d'un groupe quasi libre à un nombre fini de générateurs est lui-même à un nombre fini de générateurs.

Soit n un entier ≥ 2 , soit A un système donné de générateurs quasi libres de G et soit i un nombre quelconque de la suite $0, 1, \dots, n-1$. Vous disons qu'un élément a de G est de classe $C_i(A)$ si a est de degré congru à i modulo n par rapport à l'ensemble des éléments de A . On décompose ainsi les éléments de G en n classes d'équivalence qui dépendent de la base A de G et qui, avec la loi de composition $C_i C_j = C_k$ où $0 \leq k \leq n-1$, $k \equiv i + j \pmod{n}$, forment un groupe abélien. La classe $C_0(A)$ est un sous-groupe d'index n de G . Quel que soit l'entier $n \geq 2$, tout groupe quasi libre possède des sous-groupes d'index n . Le nombre de ces sous-groupes, pour tout n fini, est, comme on sait, fini, si G est engendré par un nombre fini k d'éléments. Soient $B_1(b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1k})$ et $B_2(b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2k})$ deux bases distinctes quelconques de G et soit $A(a_1, a_2, \dots, a_k)$ la base primitive à partir de laquelle le groupe G a été défini. n étant un entier ≥ 2 et j_1, j_2, \dots, j_k étant k nombres non tous nuls et pas nécessairement distincts de la suite $0, 1, \dots, n-1$, tels que le p.g.c.d. de ces k nombres et de n est égal à 1, il existe une base B de G dans laquelle a_i est de degré j_i par rapport à l'ensemble des éléments de B , quel que soit $i = 1, 2, \dots, k$. Soit $j_{1i} (j_{2i})$ le degré de a_i par rapport à l'ensemble des éléments de la base $B_1 (B_2)$, $i = 1, 2, \dots, k$. La condition nécessaire et suffisante pour que $C_0(B_1)$ soit différent de $C_0(B_2)$ c'est que la matrice $\begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} & \cdots & j_{1k} \\ j_{21} & j_{22} & \cdots & j_{2k} \end{pmatrix}$ soit de rang 2. Il s'ensuit que tout groupe quasi libre à un nombre fini k de générateurs possède en tout cas $(n_k - 1 - N_{n,k})/\varphi(n)$ de sous-groupes d'index fini n , quel que soit $n \geq 2$, $N_{n,k}$ désignant le nombre de suites distinctes j_1, j_2, \dots, j_k formées de nombres non tous nuls de la suite $0, 1, \dots, n-1$, tels que le p.g.c.d. des k nombres d'une

telle suite et de n soit > 1 et $\varphi(n)$ étant le nombre d'éléments de la suite $1, 2, \dots, n-1$, premiers avec n .

Tout élément quasi libre d'un groupe quasi libre est d'ordre infini. Tout groupe quasi libre est d'ordre infini et il possède aussi bien une infinité d'éléments quasi libres qu'une infinité d'éléments qui ne sont pas quasi libres, s'il n'est pas cyclique. Il possède une infinité de sous-groupes invariants distincts composés uniquement d'éléments qui ne sont pas quasi libres. Tout élément de G (que nous appelons « nul ») de degré nul par rapport à chaque élément d'une base donnée de G jouit de la même propriété par rapport à tout élément de chaque base de G et il n'est pas quasi libre. Quelle que soit la base B d'un groupe quasi libre G et quel que soit le sous-ensemble B^* non vide de G , B^* engendre un sous-groupe quasi libre G^* de G et tout élément quasi libre de G^* est aussi un élément quasi libre de G^*).

Les groupes fondamentaux et la décomposition d'un groupe fondamental en produit quasi libre.

Nous appelons *fondamental* tout groupe qui possède des systèmes irréductibles d'éléments générateurs appelés *bases du groupe*, l'irréductibilité s'étendant dans le sens défini ci-dessus. Tous les groupes d'ordre fini, les groupes libres, les groupes quasi libres et beaucoup d'autres groupes sont des groupes fondamentaux. Mais il existe aussi une infinité de groupes d'ordre infini qui ne sont pas fondamentaux.

Nous disons qu'un groupe fondamental G est décomposé en produit quasi libre de ses sous-groupes fondamentaux G_λ , $\lambda \in \Lambda$, et nous écrivons

$$(1) \quad G = \coprod_{\lambda \in \Lambda}^{**} G_\lambda$$

si l'ensemble des sous-groupes G_λ engendre G et si A_λ étant une base quelconque de G_λ , quel que soit l'indice $\lambda \in \Lambda$, l'ensemble $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ constitue une base de G .

Les facteurs G_λ qui figurent dans la formule (1) sont appelés facteurs fondamentaux de G .

Le produit quasi libre présente de grandes analogies avec le produit libre. Il est susceptible aussi bien de prolongement que de l'opération inverse.

*) Voir à ce sujet:

1. S. PICCARD: Structure des groupes libres. *Annales sc. de l'Ecole Normale supérieure*, Paris, LXXVI, 1959, fasc. 1, pp. 1-58.
2. S. PICCARD: Les groupes quasi libres. *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, Paris, t. 250, pp. 3260-3262.
3. S. PICCARD: Les groupes quasi libres. *Publications du Séminaire de Géométrie de l'Université de Neuchâtel*, fasc. 3, 1961.

Un élément de G est appelé fondamental s'il appartient à une base au moins de G .

Si G est décomposé en le produit quasi libre (1), aucun élément fondamental d'un facteur G_λ de ce produit ne peut être obtenu par composition finie d'éléments des autres facteurs de cette décomposition.

Tout élément fondamental d'un facteur G_λ est aussi un élément fondamental de G .

Deux facteurs différents G_{λ_1} et G_{λ_2} faisant partie d'une décomposition d'un groupe fondamental en produit quasi libre peuvent avoir des éléments $\neq 1$ en commun, ils peuvent même en avoir une infinité, mais aucun de ces éléments n'est fondamental ni dans G_{λ_1} ni dans G_{λ_2} .

7b. S. PICCARD (Neuchâtel): *Sur les éléments libres des groupes libres.*

Un élément d'un groupe libre est appelé *libre* s'il fait partie d'un système de générateurs libres du groupe, c'est-à-dire d'un système de générateurs qui ne sont liés que par des relations triviales découlant des axiomes de groupe. Tous les éléments d'un groupe libre ne sont pas libres. Soit L l'ensemble des éléments libres et N l'ensemble des éléments non libres d'un groupe libre G . Si G est cyclique, engendré par le seul élément libre a , l'ensemble L se compose, comme on sait, des deux éléments a et a^{-1} alors que l'ensemble N est infini. Si le groupe libre G n'est pas cyclique, les deux ensembles L et N sont infinis et de même puissance. On peut répartir les éléments de G en classes d'équivalence, telles que chacune de ces classes soit où bien composée uniquement d'éléments de N ou bien qu'elle contienne aussi bien des éléments de L que des éléments de N , chacune de ces classes contenant au plus un élément de tout système irréductible de générateurs de G . Ces classes sont les éléments des groupes abéliens dont le treillis est associé à G . Soit A un système donné de générateurs libres a_λ , $\lambda \in \Lambda$, du groupe libre G . Soit a un élément quelconque de G . Il existe comme on sait une composition finie réduite unique d'éléments de A qui représente a . Cette composition est de la forme

$$(1) \quad a_{\lambda_1}^{i_1} a_{\lambda_2}^{i_2}, \dots, a_{\lambda_n}^{i_n}$$

où n est un entier ≥ 1 , $a_{\lambda_t} \in A$, $t = 1, 2, \dots, n$, $a_{\lambda_t} \neq a_{\lambda_{t+1}}$, $t = 1, 2, \dots, n-1$, et i_1, \dots, i_n sont des entiers dont aucun n'est nul si $a \neq 1$. Une composition finie réduite d'éléments de A étant donnée, il s'agit de savoir si elle représente un élément libre de G ou non.

Dans le cas où l'ensemble A est fini, la solution de ce problème découle d'un théorème du mathématicien russe Grouschkko *. Cette solution peut être formulée comme suit: Soit $A = A(a_1, a_2, \dots, a_k)$ (k fini ≥ 2). On sait que tout système de générateurs libres appelé base de G , est alors formé de k éléments. Soit $B(b_1, b_2, \dots, b_k)$ une base quelconque de G , soit O_1 l'opération qui consiste à remplacer dans une base de G un élément par son inverse et soit O_2 l'opération qui consiste à remplacer dans une base de G un élément quelconque par le produit à droite ou à gauche de cet élément par une composition finie quelconque des autres éléments de la base considérée. Toute base B de G peut se déduire de la base A par un nombre fini d'opérations O_1 et O_2 .

Supposons maintenant que l'ensemble A est de puissance infinie. On a alors les deux propositions suivantes:

Proposition 1. — Quel que soit le sous-groupe G^* du groupe libre G , tout élément libre de G qui fait partie de G^* est aussi un élément libre de G^* .

Proposition 2. — Quelle que soit la base A d'un groupe libre G et quel que soit le sous-ensemble non vide A^* de A , tout élément libre du groupe libre G^* engendré par A^* est aussi un élément libre du groupe G .

Il ressort de ces deux propositions que pour savoir si un élément quelconque a d'un groupe libre à base infinie A est libre ou non, il suffit de considérer la composition finie réduite d'éléments de A qui le représente: soit $f(a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}, \dots, a_{\lambda_r})$ cette composition dans laquelle figurent certains éléments $a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}, \dots, a_{\lambda_r}$ de A , en nombre fini r ; on envisagera ensuite le sous-groupe G^* de G engendré par les éléments $a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}, \dots, a_{\lambda_r}$ et on s'appuiera sur le théorème de Grouschkko pour décider si a est un élément libre de G^* ou non. Si a est libre dans G^* il l'est également dans G d'après la proposition 2.

Il ressort de ces considérations que toute composition finie réduite de la forme (1) d'éléments d'une base d'un groupe libre G , dans laquelle tous les exposants i_1, i_2, \dots, i_n sont $\neq 1$ ou -1 , représente un élément non libre de G . D'autre part, quels que soient les entiers $r_i^1, r_i^2, \dots, r_i^i$, si le groupe libre G est engendré par les k éléments a_1, a_2, \dots, a_k , le produit

$$\left[a_1 \left(a_2 a_1^{r_2^1} \right)^{r_2^2} \left(a_3 a_2^{r_3^2} a_1^{r_3^1} \right)^{r_3^3} \dots \left(a_k a_{k-1}^{r_{k-1}^{k-1}} a_{k-2}^{r_{k-2}^{k-2}} \dots a_1^{r_1^1} \right)^{r_k^k} \right]^{r_1^1} a_k a_{k-1}^{r_{k-1}^{k-1}} a_{k-2}^{r_{k-2}^{k-2}} \dots a_1^{r_k^1}$$

définit un élément libre de G .

* Voir par exemple, Kurosch: *Théorie des groupes*, 2e éd. russe, Moscou, p. 252 et ss

Si un élément a d'un groupe libre G est de degré nul par rapport à tout élément d'une base A de G , il est également de degré nul par rapport à chaque élément de toute autre base B de G . Un tel élément de G n'est pas libre.

Quel que soit l'entier $n \geq 2$, si un élément a d'un groupe libre G est de degré congru à zéro modulo n par rapport à chaque élément d'une base A de G , cet élément est également de degré congru à zéro modulo n par rapport à chaque élément de toute autre base de G et un tel élément n'est également pas libre.

Tout groupe libre possède une infinité de sous-groupes invariants distincts composés uniquement d'éléments non libres.

Les propositions 1 et 2 facilitent grandement la recherche des éléments libres et permettent de ramener le cas des groupes libres à base de puissance infinie quelconque à celui des groupes libres à un nombre fini de générateurs libres.