

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 6 (1960)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LES MODÈLES LINÉAIRES EN ANALYSE STATISTIQUE  
**Autor:** Breny, H.  
**Kapitel:** 2, 3. Sous-espaces disjoints non orthogonaux.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-36336>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$$\Delta_a = \frac{\mathbf{l}_f^* \mathbf{x} - a}{\sigma \sqrt{(\mathbf{l}_f^* \mathbf{l}_f)}} : \frac{\sqrt{\mathbf{SCE}}}{\sigma \sqrt{(n-r)}} = \frac{(\mathbf{l}_f^* \mathbf{x} - a) \sqrt{(n-r)}}{\sqrt{[(\mathbf{l}_f^* \mathbf{l}_f) \mathbf{SCE}]}}$$

est une aléatoire  $\mathbf{t}_{n-r}$ , ce qui permet d'éprouver l'hypothèse en question ou d'estimer  $\mathbf{f}^* \mathbf{b}$ .

2, 24. Soient  $\mathbf{f}_1^* \mathbf{b}, \dots, \mathbf{f}_s^* \mathbf{b}$  des combinaisons estimables, linéairement indépendantes, et  $\mathbf{l}_{f_i}^* \mathbf{x}$  ( $i = 1, \dots, s$ ) leurs estimateurs privilégiés. **Sous l'hypothèse**  $\mathbf{f}_1^* \mathbf{b} = \dots = \mathbf{f}_s^* \mathbf{b} = 0$ , les moyennes des  $\mathbf{l}_{f_i}^* \mathbf{x}$  sont toutes nulles, et donc  $(1/\sigma^2) \mathbf{SC}\{\mathbf{l}_{f_1}^*, \dots, \mathbf{l}_{f_s}^*\}$  est une aléatoire  $\chi_s^2$ ; cela entraîne que

$$\mathbf{Q} = \frac{\mathbf{SC}\{\mathbf{l}_{f_1}^*, \dots, \mathbf{l}_{f_s}^*\}/s}{\mathbf{SCE}/(n-r)}$$

est une aléatoire  $\mathbf{F}_{s, n-r}$ . Si l'hypothèse en question est fausse,  $\mathbf{Q}$  est, en loi, plus grande que  $\mathbf{F}_{s, n-r}$ ; on éprouvera donc cette hypothèse en comparant la valeur observée de  $\mathbf{Q}$  à  $\mathbf{F}_{s, n-r}$ , les grandes valeurs de  $\mathbf{Q}$  étant critiques.

**Remarque.** — Il est manifeste que, si  $\alpha$  est un nombre certain quelconque, on a  $\mathbf{SC}\{\alpha \mathbf{w}^*\} = \mathbf{SC}\{\mathbf{w}^*\}$ . On peut donc négliger un facteur constant dans le calcul d'une somme de carrés. Il n'en est pas de même dans le calcul de l'expression  $\Delta_a$  du § 2, 33.

### 2, 3. Sous-espaces disjoints non orthogonaux.

2, 31. Soient  $\mathbf{U}_q^*$  et  $\mathbf{U}_{r-q}^*$  deux sous-espaces complémentaires de  $\mathbf{V}_+$ , de dimensions  $q$  et  $r - q$ :  $\mathbf{V}_+ = \mathbf{U}_q^* \oplus \mathbf{U}_{r-q}^*$ ; on ne suppose pas que  $\mathbf{U}_q^*$  et  $\mathbf{U}_{r-q}^*$  sont mutuellement orthogonaux. On cherche à interpréter  $\mathbf{SC} \mathbf{U}_q^*$  et  $\mathbf{SC} \mathbf{U}_{r-q}^*$ . Pour cela, on considère, outre le modèle initial, le modèle où

$$(\mathbf{l}^* \in \mathbf{U}_{r-q}^*) \quad \text{implique} \quad \mathbf{E} \mathbf{l}^* \mathbf{x} = 0, \quad (11)$$

tandis que  $(\mathbf{l}^* \in \mathbf{U}_q^*)$  implique  $\mathbf{E} \mathbf{l}^* \mathbf{x} \neq 0$  pour une valeur au moins de  $\mathbf{b}$ .

[On pourrait décrire ce modèle ainsi: soit  $\mathbf{l}_1^*, \dots, \mathbf{l}_q^*$  une base de  $\mathbf{U}_q^*$ ,  $\mathbf{l}_{q+1}^*, \dots, \mathbf{l}_r^*$  une base de  $\mathbf{U}_{r-q}^*$ , et  $\mathfrak{W}$  telle que, dans le modèle initial,

$$\hat{\mathbf{b}}_H = \mathfrak{W} [\mathbf{l}_1^* \mathbf{x}, \dots, \mathbf{l}_r^* \mathbf{x}]^T, \quad \mathbf{E} \mathbf{x} = \mathfrak{A} \mathfrak{W}^{-1} \mathfrak{W} \mathbf{b} = \mathfrak{A} \mathfrak{W}^{-1} \mathbf{w};$$

le nouveau modèle est

$$\mathbf{E} \mathbf{z} = \mathbf{A} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{z} \mathbf{w}, \quad \mathbf{z} = \begin{vmatrix} \mathbf{S}_q & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot$$

Soient  $\mathbf{SCN}_q$  et  $\mathbf{SCE}_{n-q}$  les sommes de carrés normale et des erreurs pour le nouveau modèle,  $\mathbf{SCN}_r$  et  $\mathbf{SCE}_{n-r}$  les sommes homologues du modèle initial. On a

$$\mathbf{SCU}_{r-q}^* = \mathbf{SCE}_{n-q} - \mathbf{SCE}_{n-r}.$$

En effet, en notant  $\mathbf{U}'_q$  le complément orthogonal de  $\mathbf{U}_{r-q}^*$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbf{SCT} &= \mathbf{SCU}'_q + \mathbf{SCU}_{r-q}^* + \mathbf{SCE}_{n-r} \\ &= \mathbf{SCN}_q + \mathbf{SCE}_{n-q}; \end{aligned}$$

or, de quoi se compose l'espace des erreurs du nouveau modèle,  $\mathbf{V}_{0, n-q}$ ? il contient évidemment  $\mathbf{V}_0$ , puis un sous-espace de  $\mathbf{V}^*$ , de dimensions  $r - q$ , disjoint de  $\mathbf{V}_0$ ; par ailleurs,  $\mathbf{U}_{r-q}^*$  appartient à  $\mathbf{V}_{0, n-q}$  en vertu de (11), et est de dimension  $r - q$ ; donc

$$\mathbf{V}_{0, n-q} = \mathbf{V}_0 \oplus \mathbf{U}_{r-q}^*;$$

en outre,  $\mathbf{V}_0$  et  $\mathbf{U}_{r-q}^* \subset \mathbf{V}_+$  sont mutuellement orthogonaux, donc

$$\begin{aligned} \mathbf{SCE}_{n-q} &\equiv \mathbf{SCV}_{0, n-q} = \mathbf{SCV}_0 + \mathbf{SCU}_{r-q}^* \\ &= \mathbf{SCE}_{n-r} + \mathbf{SCU}_{r-q}^*, \end{aligned}$$

d'où la thèse; on voit en outre que  $\mathbf{SCN}_q = \mathbf{SCU}'_q \neq \mathbf{SCU}_q^*$ .

2, 32. Il est commode d'introduire la notation suivante <sup>12)</sup>:

$$\begin{aligned} \mathbf{SCT} - \mathbf{SCE}_{n-q} &= \mathbf{red} [\mathbf{U}_q^*], \\ \mathbf{SCE}_{n-q} - \mathbf{SCE}_{n-r} &= \mathbf{red} [\mathbf{U}_{r-q}^* \mid \mathbf{U}_q^*] (\neq \mathbf{red} [\mathbf{U}_{r-q}^*]). \end{aligned}$$

On a alors

$$\mathbf{SCT} = \mathbf{red} [\mathbf{U}_q^*] + \mathbf{red} [\mathbf{U}_{r-q}^* \mid \mathbf{U}_q^*] + \mathbf{SCE}_{n-r}$$

avec

$$\mathbf{red} [\mathbf{U}_{r-q}^* \mid \mathbf{U}_q^*] = \mathbf{SCU}_{r-q}^*,$$

$$\mathbf{red} [\mathbf{U}_q^*] = \mathbf{SCU}'_q \neq \mathbf{SCU}_q^*.$$

Bien entendu, les relations obtenues en permutant les rôles de  $\mathbf{U}_q^*$  et  $\mathbf{U}_{r-q}^*$  sont aussi valables; ces rôles ne sont évidemment

pas symétriques, à moins que  $\mathbf{U}_q^*$  et  $\mathbf{U}_{r-q}^*$  ne soient mutuellement orthogonaux; dans ce dernier cas,

$$\begin{aligned}\mathbf{red} [\mathbf{U}_q^*] &= \mathbf{red} [\mathbf{U}_q^* \mid \mathbf{U}_{r-q}^*] = \mathbf{SC} \mathbf{U}_q^* , \\ \mathbf{red} [\mathbf{U}_{r-q}^*] &= \mathbf{red} [\mathbf{U}_{r-q}^* \mid \mathbf{U}_q^*] = \mathbf{SC} \mathbf{U}_{r-q}^* .\end{aligned}$$

2, 33. Ces considérations s'étendent aisément au cas où  $\mathbf{V}_+$  est décomposé en plus de deux sous-espaces, suivant le schéma

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}_+ = \mathbf{U}_1^* \oplus \mathbf{U}_2^* \oplus \dots \oplus \mathbf{U}_t^* , \\ \dim \mathbf{U}_i^* = r_i , \quad r_1 + \dots + r_k = \rho_k ; \quad \rho_t = r . \end{array} \right.$$

On doit alors considérer  $t$  modèles successifs (et l'ordre dans lequel ces modèles font intervenir les  $\mathbf{U}_i^*$  est essentiel); le  $k^{\text{ème}}$  de ces modèles est caractérisé par

$$\left[ \mathbf{l}^* \in \bigoplus_{k+1}^t \mathbf{U}_i^* \right] \quad \text{implique} \quad \mathbf{E} \mathbf{l}^* \mathbf{x} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, t-1) ,$$

le  $t^{\text{ème}}$  étant le modèle initial. On note  $\mathbf{SCE}_{n-\rho_k}$  la somme de carrés des erreurs attachée au  $k^{\text{ème}}$  modèle, et on montre sans peine que

$$\mathbf{SC} \left( \bigoplus_{k+1}^t \mathbf{U}_i^* \right) = \mathbf{SCE}_{n-\rho_k} - \mathbf{SCE}_{n-r} ;$$

on pose alors

$$\begin{aligned}\mathbf{red} [\mathbf{U}_1^*] &= \mathbf{SCT} - \mathbf{SCE}_{n-\rho_1} \\ \mathbf{red} [\mathbf{U}_{k+1}^* \mid \mathbf{U}_1^*, \dots, \mathbf{U}_k^*] &= \mathbf{SCE}_{n-\rho_k} - \mathbf{SCE}_{n-\rho_{k+1}} ,\end{aligned}$$

et on a

$$\mathbf{SCN} = \mathbf{red} [\mathbf{U}_1^*] + \sum_1^{t-1} \mathbf{red} [\mathbf{U}_{k+1}^* \mid \mathbf{U}_1^*, \dots, \mathbf{U}_k^*] , \quad (12)$$

avec

$$\mathbf{red} [\mathbf{U}_t^* \mid \mathbf{U}_1^*, \dots, \mathbf{U}_{t-1}^*] = \mathbf{SC} \mathbf{U}_t^* ,$$

cette dernière relation n'étant pas généralement vraie pour les autres  $\mathbf{U}_i^*$  (exception évidente: le cas où les  $\mathbf{U}_i^*$  sont mutuellement orthogonaux).

## 2, 4. *Ecarts au modèle.*

Tout ce qui précède est valide si, réellement,  $\mathbf{E} \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{b}$ . S'il n'en est pas nécessairement ainsi, ce qui arrive lorsque le modèle