

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 6 (1960)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LES MODÈLES LINÉAIRES EN ANALYSE STATISTIQUE  
**Autor:** Breny, H.  
**Kapitel:** 2, 2. Distributions. Epreuves d'hypothèses.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-36336>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

ce résultat s'étend sans peine au cas de plus de deux composantes, et on peut énoncer que

*si  $\mathbf{U}^*$  est la somme (directe) des espaces mutuellement orthogonaux  $\mathbf{U}_1^*, \dots, \mathbf{U}_t^*$ , on a*

$$\mathbf{SC} \mathbf{U}^* = \sum_1^t \mathbf{SC} \mathbf{U}_i^* .$$

Il en résulte un mode de calcul des sommes de carrés qui est assez souvent plus commode que l'emploi des formules (7) et (8). On part d'une base  $\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_s^*$  de  $\mathbf{U}^*$ ; si elle n'est pas orthogonale, on l'orthogonalise (par exemple, par le procédé pas à pas de Schmidt), ce qui fournit la base orthogonale  $\mathbf{w}_1^*, \dots, \mathbf{w}_s^*$ ; alors on a

$$\mathbf{SC} \mathbf{U}^* = \sum_1^s \mathbf{SC} \{ \mathbf{w}_i^* \}$$

et donc, en vertu de (9),

$$\mathbf{SC} \mathbf{U}^* = \sum_1^s (\mathbf{w}_i^* \mathbf{x})^2 / (\mathbf{w}_i^* \mathbf{w}_i) . \quad (11)$$

2, 14. On écrit, en particulier,

**SCT** (somme de carrés totale) pour  $\mathbf{SC} \mathbf{V}^*$ ,  
**SCN** (somme de carrés normale) pour  $\mathbf{SC} \mathbf{V}_+$ ,  
**SCE** (somme de carrés des erreurs) pour  $\mathbf{SC} \mathbf{V}_0$ .

On notera que,  $\mathbf{V}_+$  et  $\mathbf{V}_0$  étant par définition complémentaires et orthogonaux dans  $\mathbf{V}^*$ , on a toujours

$$\mathbf{SCT} = \mathbf{SCN} + \mathbf{SCE} .$$

D'autre part,  $\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_n^*$  forment une base orthogonale de  $\mathbf{U}^*$ , et  $\mathbf{e}_i^* \mathbf{x} = \mathbf{x}_i$ ; donc

$$\mathbf{SCT} = \sum_1^n \mathbf{x}_i^2 .$$

## 2, 2. Distributions. Epreuves d'hypothèses.

2, 21. Soit  $\mathbf{U}^*$  un sous-espace de  $\mathbf{V}^*$ , de dimension  $s$ ,  $\mathbf{w}_1^*, \dots, \mathbf{w}_s^*$  une base orthogonale de  $\mathbf{U}^*$ . Chaque  $\mathbf{w}_i^* \mathbf{x}$  est une variable

aléatoire normale, de moyenne  $w_i^* \mathbf{A} b$  et de variance  $(w_i^* w_i) \sigma^2$ ; en outre, si  $i \neq k$ ,

$$\text{cov}(w_i^* \mathbf{x}, w_k^* \mathbf{x}) = (w_i^* w_k) \sigma^2 = 0 ,$$

de sorte que les aléatoires  $w_i^* \mathbf{x}$  sont les composantes non corrélées d'un vecteur multinormal, elles sont donc indépendantes.

Dès lors, si l'on suppose que  $b$  est tel que  $\mathbf{E} w_i^* \mathbf{x} = 0$  ( $i = 1, \dots, s$ ) (c'est-à-dire sous l'hypothèse  $w_1^* \mathbf{A} b = \dots = w_s^* \mathbf{A} b = 0$ ), les aléatoires  $(w_i^* \mathbf{x})/\sigma$  sont gaussiennes et indépendantes, de sorte que

$$(1/\sigma^2) \mathbf{SCEU}^* = \sum_1^s [(w_i^* \mathbf{x})/\sigma]^2$$

est une aléatoire  $\chi_s^2$ .

Si, par contre, on ne suppose pas  $\mathbf{E} w_i^* \mathbf{x} = 0$ ,  $(1/\sigma^2) \mathbf{SCEU}^*$  est une aléatoire  $\chi^2$  décentrée à  $s$  degrés de liberté, elle est donc, en loi, plus grande qu'une aléatoire  $\chi_s^2$ :

$$\mathbf{Pr}[(\mathbf{SCEU}^*)/\sigma^2 > a] \geq \mathbf{Pr}[\chi_s^2 > a].$$

2, 22. Prenons pour  $\mathbf{U}^*$  l'espace des erreurs,  $\mathbf{V}_0$ ; alors  $s = n - r$  et les conditions  $\mathbf{E} w_i^* \mathbf{x} = 0$  sont identiquement<sup>9)</sup> satisfaites. On a donc, indépendamment de toute hypothèse quant à  $b$ ,

$$\mathbf{Pr}[\mathbf{SCE} > a \sigma^2] = \mathbf{Pr}[\chi_{n-r}^2 > a],$$

d'où, notamment,

$$\mathbf{Pr}[\mathbf{SCE}/a < \sigma^2 < \mathbf{SCE}/b] = \mathbf{Pr}[a < \chi_{n-r}^2 < b],$$

ce qui permet d'estimer  $\sigma$ .

2, 23. Supposons que  $f^* b = m_f^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} b_H$  soit une combinaison estimable et que  $l_f^* \mathbf{x} \equiv m_f^T \mathbf{A}^T \mathbf{x}$  soit son estimateur privilégié. Alors :

- a) sous l'hypothèse  $f^* b = a$ ,  $[(l_f^* \mathbf{x} - a)/\sigma] / \sqrt{(l_f^* l_f)}$  est une aléatoire gaussienne;
- b)  $\mathbf{SCE}/(n - r) \sigma^2$  est une aléatoire  $\chi_{n-r}^2$ ;
- c)  $\mathbf{SCE}$  et  $l_f^* \mathbf{x}$  sont indépendantes (car  $l_f^*$ , estimatrice, est orthogonale à tous les vecteurs de  $\mathbf{V}_0$ ).

Donc, sous l'hypothèse susdite,

$$\Delta_a = \frac{\mathbf{l}_f^* \mathbf{x} - a}{\sigma \sqrt{(\mathbf{l}_f^* \mathbf{l}_f)}} : \frac{\sqrt{\mathbf{SCE}}}{\sigma \sqrt{(n-r)}} = \frac{(\mathbf{l}_f^* \mathbf{x} - a) \sqrt{(n-r)}}{\sqrt{[(\mathbf{l}_f^* \mathbf{l}_f) \mathbf{SCE}]}}$$

est une aléatoire  $\mathbf{t}_{n-r}$ , ce qui permet d'éprouver l'hypothèse en question ou d'estimer  $\mathbf{f}^* \mathbf{b}$ .

2, 24. Soient  $\mathbf{f}_1^* \mathbf{b}, \dots, \mathbf{f}_s^* \mathbf{b}$  des combinaisons estimables, linéairement indépendantes, et  $\mathbf{l}_{f_i}^* \mathbf{x}$  ( $i = 1, \dots, s$ ) leurs estimateurs privilégiés. **Sous l'hypothèse**  $\mathbf{f}_1^* \mathbf{b} = \dots = \mathbf{f}_s^* \mathbf{b} = 0$ , les moyennes des  $\mathbf{l}_{f_i}^* \mathbf{x}$  sont toutes nulles, et donc  $(1/\sigma^2) \mathbf{SC}\{\mathbf{l}_{f_1}^*, \dots, \mathbf{l}_{f_s}^*\}$  est une aléatoire  $\chi_s^2$ ; cela entraîne que

$$\mathbf{Q} = \frac{\mathbf{SC}\{\mathbf{l}_{f_1}^*, \dots, \mathbf{l}_{f_s}^*\}/s}{\mathbf{SCE}/(n-r)}$$

est une aléatoire  $\mathbf{F}_{s, n-r}$ . Si l'hypothèse en question est fausse,  $\mathbf{Q}$  est, en loi, plus grande que  $\mathbf{F}_{s, n-r}$ ; on éprouvera donc cette hypothèse en comparant la valeur observée de  $\mathbf{Q}$  à  $\mathbf{F}_{s, n-r}$ , les grandes valeurs de  $\mathbf{Q}$  étant critiques.

**Remarque.** — Il est manifeste que, si  $\alpha$  est un nombre certain quelconque, on a  $\mathbf{SC}\{\alpha w^*\} = \mathbf{SC}\{w^*\}$ . On peut donc négliger un facteur constant dans le calcul d'une somme de carrés. Il n'en est pas de même dans le calcul de l'expression  $\Delta_a$  du § 2, 33.

### 2, 3. Sous-espaces disjoints non orthogonaux.

2, 31. Soient  $\mathbf{U}_q^*$  et  $\mathbf{U}_{r-q}^*$  deux sous-espaces complémentaires de  $\mathbf{V}_+$ , de dimensions  $q$  et  $r - q$ :  $\mathbf{V}_+ = \mathbf{U}_q^* \oplus \mathbf{U}_{r-q}^*$ ; on ne suppose pas que  $\mathbf{U}_q^*$  et  $\mathbf{U}_{r-q}^*$  sont mutuellement orthogonaux. On cherche à interpréter  $\mathbf{SC} \mathbf{U}_q^*$  et  $\mathbf{SC} \mathbf{U}_{r-q}^*$ . Pour cela, on considère, outre le modèle initial, le modèle où

$$(\mathbf{l}^* \in \mathbf{U}_{r-q}^*) \quad \text{implique} \quad \mathbf{E} \mathbf{l}^* \mathbf{x} = 0 , \quad (11)$$

tandis que  $(\mathbf{l}^* \in \mathbf{U}_q^*)$  implique  $\mathbf{E} \mathbf{l}^* \mathbf{x} \neq 0$  pour une valeur au moins de  $\mathbf{b}$ .

[On pourrait décrire ce modèle ainsi: soit  $\mathbf{l}_1^*, \dots, \mathbf{l}_q^*$  une base de  $\mathbf{U}_q^*$ ,  $\mathbf{l}_{q+1}^*, \dots, \mathbf{l}_r^*$  une base de  $\mathbf{U}_{r-q}^*$ , et  $\mathfrak{W}$  telle que, dans le modèle initial,

$$\hat{\mathbf{b}}_H = \mathfrak{W} [\mathbf{l}_1^* \mathbf{x}, \dots, \mathbf{l}_r^* \mathbf{x}]^T, \quad \mathbf{E} \mathbf{x} = \mathfrak{A} \mathfrak{W}^{-1} \mathfrak{W} \mathbf{b} = \mathfrak{A} \mathfrak{W}^{-1} \mathfrak{w} ;$$