Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 6 (1960)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES MODÈLES LINÉAIRES EN ANALYSE STATISTIQUE

Autor: Breny, H.

Kapitel: 2, 1. Sommes des carrés.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-36336

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

1, 4. Moindres carrés.

A partir de la relation

$$\mathbf{E}\,\mathbf{x}\,=\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}_{H}\,\,,$$

le théorème de Gauss-Markov conduit à introduire le vecteurestimateur * défini en fonction de l'observation * par la condition que

$$S^{2}(\mathfrak{b}) \equiv (\mathfrak{x} - \mathfrak{A} \mathfrak{b})^{T} (\mathfrak{x} - \mathfrak{A} \mathfrak{b})$$

soit minimum pour $\mathfrak{b} = \overset{*}{\mathfrak{b}}$. Or, comme

$$\frac{d}{d\,b_{i,\,H}}\,\mathfrak{b}_{H}=\mathfrak{e}_{i,\,H}\ ,\ \frac{d}{d\,b_{i,\,H}}\,\mathfrak{b}_{H}^{T}=\mathfrak{e}_{i,\,H}^{T}\ ,$$

et

$$\mathbf{S^2}\left(\mathbf{b}\right) \,=\, \mathbf{x}^{\,\bigstar}\,\,\mathbf{x} \,-\!\!\!\!-\, \mathbf{b}_H^{\,T}\,\,\mathbf{X}^T\,\mathbf{x} \,-\!\!\!\!-\, \mathbf{x}^{\,\bigstar}\,\,\mathbf{X}\,\mathbf{b}_H^{\,} \,+\, \mathbf{b}_H^{\,T}\,\,\mathbf{X}^T\,\mathbf{X}\,\mathbf{b}_H^{\,} \ ,$$

on a

$$\frac{d \, \mathbf{S^2} \, (\mathfrak{b})}{d \, b_{i, \, H}} = \, 2 \, (\mathfrak{A}^T \, \mathfrak{A} \, \mathfrak{b}_H - \mathfrak{A}^T \, \mathfrak{x}) \ .$$

Les conditions $\frac{d \, \mathrm{S}^2 \, \binom{*}{\mathfrak{d}}}{d \, b_{i, \, H}} = 0$ conduisent donc au système

$$\mathfrak{A}^T\mathfrak{A} \overset{*}{\mathfrak{b}}_H = \mathfrak{A}^T \overset{*}{\boldsymbol{x}}$$
 ,

identique au système normal. Il en résulte que, si r=p, les estimateurs de moindres carrés ne sont autres que les estimateurs privilégiés. Si r < p, les deux méthodes conduisent aux mêmes combinaisons estimables fondamentales.

2. Distributions et épreuves d'hypothèses.

2, 1. Sommes des carrés.

2, 11. Soit U* un sous-espace vectoriel de V*; on appelle « somme de carrés due à U* », et on note SCU* 11), le carré scalaire de la projection orthogonale de * sur le dual U de U*. La dimension de U* est, par définition, le « nombre de degrés de liberté » de SCU*.

Si les vecteurs v_1^{\star} , ... v_t^{\star} $(t \ge s)$ engendrent \mathbf{U}^{\star} , on écrit, d'ordinaire, $\{v_1^{\star}, ..., v_t^{\star}\}$ pour \mathbf{U}^{\star} ; on écrira donc aussi $\mathbf{SC}\{v_1^{\star}, ..., v_t^{\star}\}$ pour $\mathbf{SC}\mathbf{U}^{\star}$.

2, 12. Pour calculer effectivement SCU^* , on introduit une base quelconque de U^* , soit \mathfrak{u}_1^* , ..., \mathfrak{u}_s^* . La projection orthogonale \mathfrak{x}_u de \mathfrak{x} sur U est alors définie par les relations

$$\mathbf{x}_u = \sum \lambda_i \, \mathbf{u}_i \;\;,\; < \mathbf{x} - \mathbf{x}_u \;,\; \mathbf{u}_k > \equiv \mathbf{u}_k^{\star} \; (\mathbf{x} - \mathbf{x}_u) = 0 \quad (k = 1, ..., s)$$

d'où l'on tire

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \mathfrak{u}_i^{\star} \mathfrak{u}_k = \mathfrak{u}_k^{\star} * (k = 1, ..., s) , \qquad (7)$$

système d'équations linéaires qui détermine entièrement les λ_i (en effet, les \mathfrak{u}_i formant une base de \mathbf{U} , la matrice $||\mathfrak{u}_i^{\star}\mathfrak{u}_k||$ est de rang s). On a alors

$$\begin{split} \mathbf{SC} \, \mathbf{U}^{\star} &= \mathbf{x}_{u}^{\star} \, \, \mathbf{x}_{u} = \left(\sum_{1}^{s} \lambda_{i} \, \mathbf{u}_{i}^{\star} \right) \left(\sum_{1}^{s} \lambda_{k} \, \mathbf{u}_{k} \right) \\ &= \sum_{1}^{s} \sum_{1}^{s} \lambda_{i} \, \lambda_{k} \, \mathbf{u}_{i}^{\star} \, \mathbf{u}_{k} \end{split}$$

moyennant (7), ce qui entraîne

$$\mathbf{SC} \, \mathbf{U}^{\star} = \sum_{1}^{s} \, \lambda_{k} \, \mathfrak{u}_{k}^{\star} \, \mathfrak{x} \quad . \tag{8}$$

Dans le cas où s=1 (U^* engendré par l'unique vecteur u^*), on a

$$\mathbf{SC}\{\mathfrak{u}^{\star}\} = (\mathfrak{u}^{\star} *)^{2} / (\mathfrak{u}^{\star} \mathfrak{u}) . \tag{9}$$

2, 13. Soient U_1^{\star} et U_2^{\star} deux sous-espaces complémentaires de U^{\star} , mutuellement orthogonaux, U_1 et U_2 leurs duals; ceux-ci sont, dans U, deux sous-espaces complémentaires mutuellement orthogonaux, et on a

$$oldsymbol{arkappa}_u^\star oldsymbol{arkappa}_u = oldsymbol{arkappa}_{u_1}^\star oldsymbol{arkappa}_{u_1} + oldsymbol{arkappa}_{u_2}^\star oldsymbol{arkappa}_{u_2}$$
 ,

ce qui entraîne

$$\mathbf{SC} \, \mathbf{U}^{\star} = \mathbf{SC} \, \mathbf{U}_{1}^{\star} + \mathbf{SC} \, \mathbf{U}_{2}^{\star} . \tag{10}$$

ce résultat s'étend sans peine au cas de plus de deux compo santes, et on peut énoncer que

si U^* est la somme (directe) des espaces mutuellement orthogonaux U_1^* , ..., U_t^* , on a

$$\mathbf{SC} \, \mathbf{U}^{\star} = \sum_{i=1}^{t} \, \mathbf{SC} \, \mathbf{U}_{i}^{\star} .$$

Il en résulte un mode de calcul des sommes de carrés qui est assez souvent plus commode que l'emploi des formules (7) et (8). On part d'une base \mathfrak{U}_1^{\star} , ..., \mathfrak{U}_s^{\star} de U^{\star} ; si elle n'est pas orthogonale, on l'orthogonalise (par exemple, par le procédé pas à pas de Schmidt), ce qui fournit la base orthogonale \mathfrak{W}_1^{\star} , ..., \mathfrak{W}_s^{\star} ; alors on a

$$\mathbf{SC} \, \mathsf{U}^{ullet} \ \coloneqq \sum_{1}^{s} \, \mathbf{SC} \big\{ \, \mathfrak{w}_{i}^{\,ullet} \, \big\}$$

et donc, en vertu de (9),

$$\mathbf{SC} \, \mathbf{U}^{\star} = \sum_{i=1}^{s} \left(w_{i}^{\star} \, \boldsymbol{x} \right)^{2} / \left(w_{i}^{\star} \, w_{i} \right) . \tag{11}$$

2, 14. On écrit, en particulier,

SCT (somme de carrés totale) pour SCV*,

SCN (somme de carrés normale) pour SC V,

SCE (somme de carrés des erreurs) pour SC V₀.

On notera que, V_+ et V_0 étant par définition complémentaires et orthogonaux dans V^* , on a toujours

$$SCT = SCN + SCE$$
.

D'autre part, e_i^* , ..., e_n^* forment une base orthogonale de U^* , et $e_i^* x = \mathbf{x}_i$; donc

$$\mathbf{SCT} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_{i}^{2} .$$

2, 2. Distributions. Epreuves d'hypothèses.

2, 21. Soit U^* un sous-espace de V^* , de dimension s, w_i^* , ..., w_s^* une base orthogonale de U^* . Chaque w_i^* * est une variable