

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 6 (1960)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LES MODÈLES LINÉAIRES EN ANALYSE STATISTIQUE  
**Autor:** Breny, H.  
**Kapitel:** 2, 1. Sommes des carrés.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-36336>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

1, 4. *Moindres carrés.*

A partir de la relation

$$\mathbf{E} \mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{b}_H ,$$

le théorème de Gauss-Markov conduit à introduire le vecteur-estimateur  $\hat{\mathbf{b}}$  défini en fonction de l'observation  $\mathbf{v}$  par la condition que

$$S^2(\mathbf{b}) = (\mathbf{v} - \mathbf{A} \mathbf{b})^T (\mathbf{v} - \mathbf{A} \mathbf{b})$$

soit minimum pour  $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{b}}$ . Or, comme

$$\frac{d}{d b_{i, H}} \mathbf{b}_H = \mathbf{e}_{i, H} , \quad \frac{d}{d b_{i, H}} \mathbf{b}_H^T = \mathbf{e}_{i, H}^T ,$$

et

$$S^2(\mathbf{b}) = \mathbf{v}^T \mathbf{v} - \mathbf{b}_H^T \mathbf{A}^T \mathbf{v} - \mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{b}_H + \mathbf{b}_H^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{b}_H ,$$

on a

$$\frac{d S^2(\mathbf{b})}{d b_{i, H}} = 2 (\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{b}_H - \mathbf{A}^T \mathbf{v}) .$$

Les conditions  $\frac{d S^2(\mathbf{b})}{d b_{i, H}} = 0$  conduisent donc au système

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{b}}_H = \mathbf{A}^T \mathbf{v} ,$$

identique au système normal. Il en résulte que, si  $r = p$ , les estimateurs de moindres carrés ne sont autres que les estimateurs privilégiés. Si  $r < p$ , les deux méthodes conduisent aux mêmes combinaisons estimables fondamentales.

## 2. DISTRIBUTIONS ET ÉPREUVES D'HYPOTHÈSES.

2, 1. *Sommes des carrés.*

2, 11. Soit  $\mathbf{U}^*$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{V}^*$ ; on appelle « somme de carrés due à  $\mathbf{U}^*$  », et on note  $\mathbf{SCU}^*$ <sup>11)</sup>, le carré scalaire de la projection orthogonale de  $\mathbf{v}$  sur le dual  $\mathbf{U}$  de  $\mathbf{U}^*$ . La dimension de  $\mathbf{U}^*$  est, par définition, le « nombre de degrés de liberté » de  $\mathbf{SCU}^*$ .

Si les vecteurs  $v_1^*, \dots, v_t^*$  ( $t \geq s$ ) engendrent  $\mathbf{U}^*$ , on écrit, d'ordinaire,  $\{v_1^*, \dots, v_t^*\}$  pour  $\mathbf{U}^*$ ; on écrira donc aussi  $\mathbf{SC}\{v_1^*, \dots, v_t^*\}$  pour  $\mathbf{SC}\mathbf{U}^*$ .

2, 12. Pour calculer effectivement  $\mathbf{SC}\mathbf{U}^*$ , on introduit une base quelconque de  $\mathbf{U}^*$ , soit  $u_1^*, \dots, u_s^*$ . La projection orthogonale  $\mathbf{x}_u$  de  $\mathbf{x}$  sur  $\mathbf{U}$  est alors définie par les relations

$$\mathbf{x}_u = \sum \lambda_i u_i, \quad \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_u, u_k \rangle \equiv u_k^* (\mathbf{x} - \mathbf{x}_u) = 0 \quad (k = 1, \dots, s)$$

d'où l'on tire

$$\sum_{i=1}^s \lambda_i u_i^* u_k = u_k^* \mathbf{x} \quad (k = 1, \dots, s), \quad (7)$$

système d'équations linéaires qui détermine entièrement les  $\lambda_i$  (en effet, les  $u_i$  formant une base de  $\mathbf{U}$ , la matrice  $\|u_i^* u_k\|$  est de rang  $s$ ). On a alors

$$\begin{aligned} \mathbf{SC}\mathbf{U}^* &= \mathbf{x}_u^* \mathbf{x}_u = \left( \sum_1^s \lambda_i u_i^* \right) \left( \sum_1^s \lambda_k u_k \right) \\ &= \sum_1^s \sum_1^s \lambda_i \lambda_k u_i^* u_k \end{aligned}$$

moyennant (7), ce qui entraîne

$$\mathbf{SC}\mathbf{U}^* = \sum_1^s \lambda_k u_k^* \mathbf{x}. \quad (8)$$

Dans le cas où  $s = 1$  ( $\mathbf{U}^*$  engendré par l'unique vecteur  $u^*$ ), on a

$$\mathbf{SC}\{u^*\} = (u^* \mathbf{x})^2 / (u^* u). \quad (9)$$

2, 13. Soient  $\mathbf{U}_1^*$  et  $\mathbf{U}_2^*$  deux sous-espaces complémentaires de  $\mathbf{U}^*$ , mutuellement orthogonaux,  $\mathbf{U}_1$  et  $\mathbf{U}_2$  leurs duals; ceux-ci sont, dans  $\mathbf{U}$ , deux sous-espaces complémentaires mutuellement orthogonaux, et on a

$$\mathbf{x}_u^* \mathbf{x}_u = \mathbf{x}_{u_1}^* \mathbf{x}_{u_1} + \mathbf{x}_{u_2}^* \mathbf{x}_{u_2},$$

ce qui entraîne

$$\mathbf{SC}\mathbf{U}^* = \mathbf{SC}\mathbf{U}_1^* + \mathbf{SC}\mathbf{U}_2^*. \quad (10)$$

ce résultat s'étend sans peine au cas de plus de deux composantes, et on peut énoncer que

*si  $\mathbf{U}^*$  est la somme (directe) des espaces mutuellement orthogonaux  $\mathbf{U}_1^*$ , ...,  $\mathbf{U}_t^*$ , on a*

$$\mathbf{SC} \mathbf{U}^* = \sum_1^t \mathbf{SC} \mathbf{U}_i^* .$$

Il en résulte un mode de calcul des sommes de carrés qui est assez souvent plus commode que l'emploi des formules (7) et (8). On part d'une base  $\mathbf{u}_1^*$ , ...,  $\mathbf{u}_s^*$  de  $\mathbf{U}^*$ ; si elle n'est pas orthogonale, on l'orthogonalise (par exemple, par le procédé pas à pas de Schmidt), ce qui fournit la base orthogonale  $\mathbf{w}_1^*$ , ...,  $\mathbf{w}_s^*$ ; alors on a

$$\mathbf{SC} \mathbf{U}^* = \sum_1^s \mathbf{SC} \{ \mathbf{w}_i^* \}$$

et donc, en vertu de (9),

$$\mathbf{SC} \mathbf{U}^* = \sum_1^s (\mathbf{w}_i^* \mathbf{x})^2 / (\mathbf{w}_i^* \mathbf{w}_i) . \quad (11)$$

2, 14. On écrit, en particulier,

**SCT** (somme de carrés totale) pour  $\mathbf{SC} \mathbf{V}^*$ ,  
**SCN** (somme de carrés normale) pour  $\mathbf{SC} \mathbf{V}_+$ ,  
**SCE** (somme de carrés des erreurs) pour  $\mathbf{SC} \mathbf{V}_0$ .

On notera que,  $\mathbf{V}_+$  et  $\mathbf{V}_0$  étant par définition complémentaires et orthogonaux dans  $\mathbf{V}^*$ , on a toujours

$$\mathbf{SCT} = \mathbf{SCN} + \mathbf{SCE} .$$

D'autre part,  $\mathbf{e}_1^*$ , ...,  $\mathbf{e}_n^*$  forment une base orthogonale de  $\mathbf{U}^*$ , et  $\mathbf{e}_i^* \mathbf{x} = \mathbf{x}_i$ ; donc

$$\mathbf{SCT} = \sum_1^n \mathbf{x}_i^2 .$$

2, 2. *Distributions. Epreuves d'hypothèses.*

2, 21. Soit  $\mathbf{U}^*$  un sous-espace de  $\mathbf{V}^*$ , de dimension  $s$ ,  $\mathbf{w}_1^*$ , ...,  $\mathbf{w}_s^*$  une base orthogonale de  $\mathbf{U}^*$ . Chaque  $\mathbf{w}_i^* \mathbf{x}$  est une variable