

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 6 (1960)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LES MODÈLES LINÉAIRES EN ANALYSE STATISTIQUE  
**Autor:** Breny, H.  
**Kapitel:** 2. Distributions et épreuves d'hypothèses  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-36336>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

1, 4. *Moindres carrés.*

A partir de la relation

$$\mathbf{E} \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{b}_H ,$$

le théorème de Gauss-Markov conduit à introduire le vecteur-estimateur  $\hat{\mathbf{b}}^*$  défini en fonction de l'observation  $\mathbf{x}$  par la condition que

$$S^2(\mathbf{b}) = (\mathbf{x} - \mathbf{A} \mathbf{b})^T (\mathbf{x} - \mathbf{A} \mathbf{b})$$

soit minimum pour  $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{b}}^*$ . Or, comme

$$\frac{d}{d b_{i,H}} \mathbf{b}_H = \mathbf{e}_{i,H} , \quad \frac{d}{d b_{i,H}} \mathbf{b}_H^T = \mathbf{e}_{i,H}^T ,$$

et

$$S^2(\mathbf{b}) = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \mathbf{b}_H^T \mathbf{A}^T \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{b}_H + \mathbf{b}_H^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{b}_H ,$$

on a

$$\frac{d S^2(\mathbf{b})}{d b_{i,H}} = 2 (\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{b}_H - \mathbf{A}^T \mathbf{x}) .$$

Les conditions  $\frac{d S^2(\mathbf{b})}{d b_{i,H}} = 0$  conduisent donc au système

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{b}}_H^* = \mathbf{A}^T \mathbf{x} ,$$

identique au système normal. Il en résulte que, si  $r = p$ , les estimateurs de moindres carrés ne sont autres que les estimateurs privilégiés. Si  $r < p$ , les deux méthodes conduisent aux mêmes combinaisons estimables fondamentales.

## 2. DISTRIBUTIONS ET ÉPREUVES D'HYPOTHÈSES.

2, 1. *Sommes des carrés.*

2, 11. Soit  $\mathbf{U}^*$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{V}^*$ ; on appelle « somme de carrés due à  $\mathbf{U}^*$  », et on note  $\mathbf{SCU}^*$ <sup>11)</sup>, le carré scalaire de la projection orthogonale de  $\mathbf{x}$  sur le dual  $\mathbf{U}$  de  $\mathbf{U}^*$ . La dimension de  $\mathbf{U}^*$  est, par définition, le « nombre de degrés de liberté » de  $\mathbf{SCU}^*$ .

Si les vecteurs  $v_1^*, \dots, v_t^*$  ( $t \geq s$ ) engendrent  $\mathbf{U}^*$ , on écrit, d'ordinaire,  $\{v_1^*, \dots, v_t^*\}$  pour  $\mathbf{U}^*$ ; on écrira donc aussi  $\text{SC}\{v_1^*, \dots, v_t^*\}$  pour  $\text{SC}\mathbf{U}^*$ .

2, 12. Pour calculer effectivement  $\text{SC}\mathbf{U}^*$ , on introduit une base quelconque de  $\mathbf{U}^*$ , soit  $u_1^*, \dots, u_s^*$ . La projection orthogonale  $\mathbf{x}_u$  de  $\mathbf{x}$  sur  $\mathbf{U}$  est alors définie par les relations

$$\mathbf{x}_u = \sum \lambda_i u_i, \quad \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_u, u_k \rangle \equiv u_k^* (\mathbf{x} - \mathbf{x}_u) = 0 \quad (k = 1, \dots, s)$$

d'où l'on tire

$$\sum_{i=1}^s \lambda_i u_i^* u_k = u_k^* \mathbf{x} \quad (k = 1, \dots, s), \quad (7)$$

système d'équations linéaires qui détermine entièrement les  $\lambda_i$  (en effet, les  $u_i$  formant une base de  $\mathbf{U}$ , la matrice  $\|u_i^* u_k\|$  est de rang  $s$ ). On a alors

$$\begin{aligned} \text{SC}\mathbf{U}^* &= \mathbf{x}_u^* \mathbf{x}_u = \left( \sum_1^s \lambda_i u_i^* \right) \left( \sum_1^s \lambda_k u_k \right) \\ &= \sum_1^s \sum_1^s \lambda_i \lambda_k u_i^* u_k \end{aligned}$$

moyennant (7), ce qui entraîne

$$\text{SC}\mathbf{U}^* = \sum_1^s \lambda_k u_k^* \mathbf{x}. \quad (8)$$

Dans le cas où  $s = 1$  ( $\mathbf{U}^*$  engendré par l'unique vecteur  $u^*$ ), on a

$$\text{SC}\{u^*\} = (u^* \mathbf{x})^2 / (u^* u). \quad (9)$$

2, 13. Soient  $\mathbf{U}_1^*$  et  $\mathbf{U}_2^*$  deux sous-espaces complémentaires de  $\mathbf{U}^*$ , mutuellement orthogonaux,  $\mathbf{U}_1$  et  $\mathbf{U}_2$  leurs duals; ceux-ci sont, dans  $\mathbf{U}$ , deux sous-espaces complémentaires mutuellement orthogonaux, et on a

$$\mathbf{x}_u^* \mathbf{x}_u = \mathbf{x}_{u_1}^* \mathbf{x}_{u_1} + \mathbf{x}_{u_2}^* \mathbf{x}_{u_2},$$

ce qui entraîne

$$\text{SC}\mathbf{U}^* = \text{SC}\mathbf{U}_1^* + \text{SC}\mathbf{U}_2^*. \quad (10)$$

ce résultat s'étend sans peine au cas de plus de deux composantes, et on peut énoncer que

*si  $\mathbf{U}^*$  est la somme (directe) des espaces mutuellement orthogonaux  $\mathbf{U}_1^*, \dots, \mathbf{U}_t^*$ , on a*

$$\mathbf{SC} \mathbf{U}^* = \sum_1^t \mathbf{SC} \mathbf{U}_i^* .$$

Il en résulte un mode de calcul des sommes de carrés qui est assez souvent plus commode que l'emploi des formules (7) et (8). On part d'une base  $\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_s^*$  de  $\mathbf{U}^*$ ; si elle n'est pas orthogonale, on l'orthogonalise (par exemple, par le procédé pas à pas de Schmidt), ce qui fournit la base orthogonale  $\mathbf{w}_1^*, \dots, \mathbf{w}_s^*$ ; alors on a

$$\mathbf{SC} \mathbf{U}^* = \sum_1^s \mathbf{SC} \{ \mathbf{w}_i^* \}$$

et donc, en vertu de (9),

$$\mathbf{SC} \mathbf{U}^* = \sum_1^s (\mathbf{w}_i^* \mathbf{x})^2 / (\mathbf{w}_i^* \mathbf{w}_i) . \quad (11)$$

2, 14. On écrit, en particulier,

**SCT** (somme de carrés totale) pour  $\mathbf{SC} \mathbf{V}^*$ ,  
**SCN** (somme de carrés normale) pour  $\mathbf{SC} \mathbf{V}_+$ ,  
**SCE** (somme de carrés des erreurs) pour  $\mathbf{SC} \mathbf{V}_0$ .

On notera que,  $\mathbf{V}_+$  et  $\mathbf{V}_0$  étant par définition complémentaires et orthogonaux dans  $\mathbf{V}^*$ , on a toujours

$$\mathbf{SCT} = \mathbf{SCN} + \mathbf{SCE} .$$

D'autre part,  $\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_n^*$  forment une base orthogonale de  $\mathbf{U}^*$ , et  $\mathbf{e}_i^* \mathbf{x} = \mathbf{x}_i$ ; donc

$$\mathbf{SCT} = \sum_1^n \mathbf{x}_i^2 .$$

## 2, 2. Distributions. Epreuves d'hypothèses.

2, 21. Soit  $\mathbf{U}^*$  un sous-espace de  $\mathbf{V}^*$ , de dimension  $s$ ,  $\mathbf{w}_1^*, \dots, \mathbf{w}_s^*$  une base orthogonale de  $\mathbf{U}^*$ . Chaque  $\mathbf{w}_i^* \mathbf{x}$  est une variable

aléatoire normale, de moyenne  $w_i^* \mathbf{A} b$  et de variance  $(w_i^* w_i) \sigma^2$ ; en outre, si  $i \neq k$ ,

$$\text{cov}(w_i^* \mathbf{x}, w_k^* \mathbf{x}) = (w_i^* w_k) \sigma^2 = 0 ,$$

de sorte que les aléatoires  $w_i^* \mathbf{x}$  sont les composantes non corrélées d'un vecteur multinormal, elles sont donc indépendantes.

Dès lors, si l'on suppose que  $b$  est tel que  $\mathbf{E} w_i^* \mathbf{x} = 0$  ( $i = 1, \dots, s$ ) (c'est-à-dire sous l'hypothèse  $w_1^* \mathbf{A} b = \dots = w_s^* \mathbf{A} b = 0$ ), les aléatoires  $(w_i^* \mathbf{x})/\sigma$  sont gaussiennes et indépendantes, de sorte que

$$(1/\sigma^2) \mathbf{SCEU}^* = \sum_1^s [(w_i^* \mathbf{x})/\sigma]^2$$

est une aléatoire  $\chi_s^2$ .

Si, par contre, on ne suppose pas  $\mathbf{E} w_i^* \mathbf{x} = 0$ ,  $(1/\sigma^2) \mathbf{SCEU}^*$  est une aléatoire  $\chi^2$  décentrée à  $s$  degrés de liberté, elle est donc, en loi, plus grande qu'une aléatoire  $\chi_s^2$ :

$$\mathbf{Pr}[(\mathbf{SCEU}^*)/\sigma^2 > a] \geq \mathbf{Pr}[\chi_s^2 > a].$$

2, 22. Prenons pour  $\mathbf{U}^*$  l'espace des erreurs,  $\mathbf{V}_0$ ; alors  $s = n - r$  et les conditions  $\mathbf{E} w_i^* \mathbf{x} = 0$  sont identiquement<sup>9)</sup> satisfaites. On a donc, indépendamment de toute hypothèse quant à  $b$ ,

$$\mathbf{Pr}[\mathbf{SCE} > a \sigma^2] = \mathbf{Pr}[\chi_{n-r}^2 > a],$$

d'où, notamment,

$$\mathbf{Pr}[\mathbf{SCE}/a < \sigma^2 < \mathbf{SCE}/b] = \mathbf{Pr}[a < \chi_{n-r}^2 < b],$$

ce qui permet d'estimer  $\sigma$ .

2, 23. Supposons que  $f^* b = m_f^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} b_H$  soit une combinaison estimable et que  $l_f^* \mathbf{x} \equiv m_f^T \mathbf{A}^T \mathbf{x}$  soit son estimateur privilégié. Alors :

- a) sous l'hypothèse  $f^* b = a$ ,  $[(l_f^* \mathbf{x} - a)/\sigma] / \sqrt{(l_f^* l_f)}$  est une aléatoire gaussienne;
- b)  $\mathbf{SCE}/(n - r) \sigma^2$  est une aléatoire  $\chi_{n-r}^2$ ;
- c)  $\mathbf{SCE}$  et  $l_f^* \mathbf{x}$  sont indépendantes (car  $l_f^*$ , estimatrice, est orthogonale à tous les vecteurs de  $\mathbf{V}_0$ ).

Donc, sous l'hypothèse susdite,

$$\Delta_a = \frac{\mathbf{l}_f^* \mathbf{x} - a}{\sigma \sqrt{(\mathbf{l}_f^* \mathbf{l}_f)}} : \frac{\sqrt{\mathbf{SCE}}}{\sigma \sqrt{(n-r)}} = \frac{(\mathbf{l}_f^* \mathbf{x} - a) \sqrt{(n-r)}}{\sqrt{[(\mathbf{l}_f^* \mathbf{l}_f) \mathbf{SCE}]}}$$

est une aléatoire  $\mathbf{t}_{n-r}$ , ce qui permet d'éprouver l'hypothèse en question ou d'estimer  $\mathbf{f}^* \mathbf{b}$ .

2, 24. Soient  $\mathbf{f}_1^* \mathbf{b}, \dots, \mathbf{f}_s^* \mathbf{b}$  des combinaisons estimables, linéairement indépendantes, et  $\mathbf{l}_{f_i}^* \mathbf{x}$  ( $i = 1, \dots, s$ ) leurs estimateurs privilégiés. **Sous l'hypothèse**  $\mathbf{f}_1^* \mathbf{b} = \dots = \mathbf{f}_s^* \mathbf{b} = 0$ , les moyennes des  $\mathbf{l}_{f_i}^* \mathbf{x}$  sont toutes nulles, et donc  $(1/\sigma^2) \mathbf{SC}\{\mathbf{l}_{f_1}^*, \dots, \mathbf{l}_{f_s}^*\}$  est une aléatoire  $\chi_s^2$ ; cela entraîne que

$$\mathbf{Q} = \frac{\mathbf{SC}\{\mathbf{l}_{f_1}^*, \dots, \mathbf{l}_{f_s}^*\}/s}{\mathbf{SCE}/(n-r)}$$

est une aléatoire  $\mathbf{F}_{s, n-r}$ . Si l'hypothèse en question est fausse,  $\mathbf{Q}$  est, en loi, plus grande que  $\mathbf{F}_{s, n-r}$ ; on éprouvera donc cette hypothèse en comparant la valeur observée de  $\mathbf{Q}$  à  $\mathbf{F}_{s, n-r}$ , les grandes valeurs de  $\mathbf{Q}$  étant critiques.

**Remarque.** — Il est manifeste que, si  $\alpha$  est un nombre certain quelconque, on a  $\mathbf{SC}\{\alpha w^*\} = \mathbf{SC}\{w^*\}$ . On peut donc négliger un facteur constant dans le calcul d'une somme de carrés. Il n'en est pas de même dans le calcul de l'expression  $\Delta_a$  du § 2, 33.

### 2, 3. Sous-espaces disjoints non orthogonaux.

2, 31. Soient  $\mathbf{U}_q^*$  et  $\mathbf{U}_{r-q}^*$  deux sous-espaces complémentaires de  $\mathbf{V}_+$ , de dimensions  $q$  et  $r - q$ :  $\mathbf{V}_+ = \mathbf{U}_q^* \oplus \mathbf{U}_{r-q}^*$ ; on ne suppose pas que  $\mathbf{U}_q^*$  et  $\mathbf{U}_{r-q}^*$  sont mutuellement orthogonaux. On cherche à interpréter  $\mathbf{SC} \mathbf{U}_q^*$  et  $\mathbf{SC} \mathbf{U}_{r-q}^*$ . Pour cela, on considère, outre le modèle initial, le modèle où

$$(\mathbf{l}^* \in \mathbf{U}_{r-q}^*) \quad \text{implique} \quad \mathbf{E} \mathbf{l}^* \mathbf{x} = 0 , \quad (11)$$

tandis que  $(\mathbf{l}^* \in \mathbf{U}_q^*)$  implique  $\mathbf{E} \mathbf{l}^* \mathbf{x} \neq 0$  pour une valeur au moins de  $\mathbf{b}$ .

[On pourrait décrire ce modèle ainsi: soit  $\mathbf{l}_1^*, \dots, \mathbf{l}_q^*$  une base de  $\mathbf{U}_q^*$ ,  $\mathbf{l}_{q+1}^*, \dots, \mathbf{l}_r^*$  une base de  $\mathbf{U}_{r-q}^*$ , et  $\mathfrak{W}$  telle que, dans le modèle initial,

$$\hat{\mathbf{b}}_H = \mathfrak{W} [\mathbf{l}_1^* \mathbf{x}, \dots, \mathbf{l}_r^* \mathbf{x}]^T, \quad \mathbf{E} \mathbf{x} = \mathfrak{A} \mathfrak{W}^{-1} \mathfrak{W} \mathbf{b} = \mathfrak{A} \mathfrak{W}^{-1} \mathfrak{w} ;$$

le nouveau modèle est

$$\mathbf{E} \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{z} \mathbf{w}, \quad \mathbf{z} = \begin{vmatrix} \mathbf{S}_q & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot$$

Soient  $\mathbf{SCN}_q$  et  $\mathbf{SCE}_{n-q}$  les sommes de carrés normale et des erreurs pour le nouveau modèle,  $\mathbf{SCN}_r$  et  $\mathbf{SCE}_{n-r}$  les sommes homologues du modèle initial. On a

$$\mathbf{SCU}_{r-q}^* = \mathbf{SCE}_{n-q} - \mathbf{SCE}_{n-r}.$$

En effet, en notant  $\mathbf{U}'_q$  le complément orthogonal de  $\mathbf{U}_{r-q}^*$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbf{SCT} &= \mathbf{SCU}'_q + \mathbf{SCU}_{r-q}^* + \mathbf{SCE}_{n-r} \\ &= \mathbf{SCN}_q + \mathbf{SCE}_{n-q}; \end{aligned}$$

or, de quoi se compose l'espace des erreurs du nouveau modèle,  $\mathbf{V}_{0,n-q}$ ? il contient évidemment  $\mathbf{V}_0$ , puis un sous-espace de  $\mathbf{V}^*$ , de dimensions  $r-q$ , disjoint de  $\mathbf{V}_0$ ; par ailleurs,  $\mathbf{U}_{r-q}^*$  appartient à  $\mathbf{V}_{0,n-q}$  en vertu de (11), et est de dimension  $r-q$ ; donc

$$\mathbf{V}_{0,n-q} = \mathbf{V}_0 \oplus \mathbf{U}_{r-q}^*;$$

en outre,  $\mathbf{V}_0$  et  $\mathbf{U}_{r-q}^* \subset \mathbf{V}_+$  sont mutuellement orthogonaux, donc

$$\begin{aligned} \mathbf{SCE}_{n-q} &\equiv \mathbf{SCV}_{0,n-q} = \mathbf{SCV}_0 + \mathbf{SCU}_{r-q}^* \\ &= \mathbf{SCE}_{n-r} + \mathbf{SCU}_{r-q}^*, \end{aligned}$$

d'où la thèse; on voit en outre que  $\mathbf{SCN}_q = \mathbf{SCU}'_q \neq \mathbf{SCU}_q^*$ .

2, 32. Il est commode d'introduire la notation suivante<sup>12)</sup>:

$$\mathbf{SCT} - \mathbf{SCE}_{n-q} = \mathbf{red} [\mathbf{U}_q^*],$$

$$\mathbf{SCE}_{n-q} - \mathbf{SCE}_{n-r} = \mathbf{red} [\mathbf{U}_{r-q}^* | \mathbf{U}_q^*] (\neq \mathbf{red} [\mathbf{U}_{r-q}^*]).$$

On a alors

$$\mathbf{SCT} = \mathbf{red} [\mathbf{U}_q^*] + \mathbf{red} [\mathbf{U}_{r-q}^* | \mathbf{U}_q^*] + \mathbf{SCE}_{n-r}$$

avec

$$\mathbf{red} [\mathbf{U}_{r-q}^* | \mathbf{U}_q^*] = \mathbf{SCU}_{r-q}^*,$$

$$\mathbf{red} [\mathbf{U}_q^*] = \mathbf{SCU}'_q \neq \mathbf{SCU}_q^*.$$

Bien entendu, les relations obtenues en permutant les rôles de  $\mathbf{U}_q^*$  et  $\mathbf{U}_{r-q}^*$  sont aussi valables; ces rôles ne sont évidemment

pas symétriques, à moins que  $\mathbf{U}_q^*$  et  $\mathbf{U}_{r-q}^*$  ne soient mutuellement orthogonaux; dans ce dernier cas,

$$\begin{aligned}\mathbf{red} [\mathbf{U}_q^*] &= \mathbf{red} [\mathbf{U}_q^* \mid \mathbf{U}_{r-q}^*] = \mathbf{SC} \mathbf{U}_q^* , \\ \mathbf{red} [\mathbf{U}_{r-q}^*] &= \mathbf{red} [\mathbf{U}_{r-q}^* \mid \mathbf{U}_q^*] = \mathbf{SC} \mathbf{U}_{r-q}^* .\end{aligned}$$

2, 33. Ces considérations s'étendent aisément au cas où  $\mathbf{V}_+$  est décomposé en plus de deux sous-espaces, suivant le schéma

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}_+ = \mathbf{U}_1^* \oplus \mathbf{U}_2^* \oplus \dots \oplus \mathbf{U}_t^* , \\ \dim \mathbf{U}_i^* = r_i , \quad r_1 + \dots + r_k = \rho_k ; \quad \rho_t = r . \end{array} \right.$$

On doit alors considérer  $t$  modèles successifs (et l'ordre dans lequel ces modèles font intervenir les  $\mathbf{U}_i^*$  est essentiel); le  $k^{\text{ème}}$  de ces modèles est caractérisé par

$$\left[ \mathbf{l}^* \in \bigoplus_{k+1}^t \mathbf{U}_i^* \right] \quad \text{implique} \quad \mathbf{E} \mathbf{l}^* \mathbf{x} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, t-1) ,$$

le  $t^{\text{ème}}$  étant le modèle initial. On note  $\mathbf{SCE}_{n-\rho_k}$  la somme de carrés des erreurs attachée au  $k^{\text{ème}}$  modèle, et on montre sans peine que

$$\mathbf{SC} \left( \bigoplus_{k+1}^t \mathbf{U}_i^* \right) = \mathbf{SCE}_{n-\rho_k} - \mathbf{SCE}_{n-r} ;$$

on pose alors

$$\begin{aligned}\mathbf{red} [\mathbf{U}_1^*] &= \mathbf{SCT} - \mathbf{SCE}_{n-\rho_1} \\ \mathbf{red} [\mathbf{U}_{k+1}^* \mid \mathbf{U}_1^*, \dots, \mathbf{U}_k^*] &= \mathbf{SCE}_{n-\rho_k} - \mathbf{SCE}_{n-\rho_{k+1}} ,\end{aligned}$$

et on a

$$\mathbf{SCN} = \mathbf{red} [\mathbf{U}_1^*] + \sum_1^{t-1} \mathbf{red} [\mathbf{U}_{k+1}^* \mid \mathbf{U}_1^*, \dots, \mathbf{U}_k^*] , \quad (12)$$

avec

$$\mathbf{red} [\mathbf{U}_t^* \mid \mathbf{U}_1^*, \dots, \mathbf{U}_{t-1}^*] = \mathbf{SC} \mathbf{U}_t^* ,$$

cette dernière relation n'étant pas généralement vraie pour les autres  $\mathbf{U}_i^*$  (exception évidente: le cas où les  $\mathbf{U}_i^*$  sont mutuellement orthogonaux).

## 2, 4. Ecarts au modèle.

Tout ce qui précède est valide si, réellement,  $\mathbf{E} \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{b}$ . S'il n'en est pas nécessairement ainsi, ce qui arrive lorsque le modèle

envisagé n'est qu'un cas particulier d'un modèle plus général auquel on désire accorder aussi quelque considération, on peut modifier un peu les énoncés des hypothèses à éprouver, en disant, par exemple: « si  $\mathbf{E} \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{b}$  et si  $\mathbf{l}_1^* \mathbf{b} = \dots = \mathbf{l}_s^* \mathbf{b} = 0$ , alors ... ». Sous cette nouvelle hypothèse,  $\mathbf{SC}\{\mathbf{l}_1^* \hat{\mathbf{b}}, \dots, \mathbf{l}_s^* \hat{\mathbf{b}}\}$  est encore distribuée comme  $\sigma^2 \chi_s^2$ . Mais  $\mathbf{SCE}$  n'est plus distribuée comme  $\sigma^2 \gamma_{n-r}$ , car, si  $\mathbf{E} \mathbf{x} - \mathbf{A} \mathbf{b}$  n'est pas identiquement nulle, les vecteurs de  $\mathbf{V}_0$  n'ont plus une moyenne nécessairement nulle. On est alors obligé de prendre comme espace des erreurs un sous-espace  $\mathbf{V}_*$  de  $\mathbf{V}_0$ , à savoir: celui des vecteurs de  $\mathbf{V}^*$  dont la moyenne est identiquement nulle dans le modèle le plus général que l'on considère. On peut dire que ce sous-espace existe dès que les observations comportent au moins une paire d'observations ayant identiquement même moyenne (dans le modèle le plus général). Nous noterons  $\mathbf{SCint}$  (« somme de carrés interne ») l'expression  $\mathbf{SC} \mathbf{V}_*$ , et  $\mathbf{SCEM}$  [« somme de carrés des écarts au modèle » (sous-entendu: au modèle restreint)] l'expression  $\mathbf{SCE} - \mathbf{SCint}$  (en désignant par  $\mathbf{V}'_*$  le complément orthogonal de  $\mathbf{V}_*$  dans  $\mathbf{V}_0$ ,  $\mathbf{SCEM}$  n'est autre que  $\mathbf{SC} \mathbf{V}'_*$ ). Dans les considérations du § 2, 2,  $\mathbf{SCint}$  peut remplacer  $\mathbf{SCE}$ ,  $n - s$  remplaçant alors  $n - r$ . Les composantes de  $\mathbf{SCint}$  sont évidemment orthogonales à celles de  $\mathbf{SCN}$ .

**Remarque.** — Les composantes additives de  $\mathbf{SCT}$  (ou, plus exactement, leurs valeurs observées) sont le plus souvent reprises en un tableau que l'on nomme « table d'analyse de la variance ». Cette désignation n'est guère heureuse, on devrait la réserver aux études de « composantes de variance » (cfr. [V]); elle paraît néanmoins avoir reçu la sanction de l'usage, et il semble assez vain de vouloir la récuser. Une telle table se présente ainsi:

Somme de carrés	Formules	Nombre de degrés de liberté
$SCT$	$\sum x_i^2$	$n$
$SCN$	$\mathbf{SC}\{\mathbf{A}^T \mathbf{x}\}$	$r$
$SCE$	$SCT - SCN$	$n - r$
$\begin{cases} SCint \\ SCEM \end{cases}$	$\begin{cases} SCV_* \\ SCE - SCint \end{cases}$	$\begin{cases} u \\ n - r - u \end{cases}$

D'ordinaire,  $SCN$  est décomposée conformément à la formule (12). Si on utilise la table de la distribution  $\mathbf{F}$ , il est utile d'adoindre à cette table une colonne « carrés moyens », où sont repris les quotients des  $SC$  par les nombres de leurs degrés de liberté.

## NOTES

1) Dans un système complet de notations, ce  $n$ -uple serait désigné, par exemple, par  $\xi_p$ .

2) Dans un système complet de notations, ce  $n$ -uple serait désigné par  $\xi_p^*$ , ou par  $\xi_p^{**}$  si la dualité des bases va de soi. Pour des raisons de convenance typographique,

nous écrirons souvent  $[a_1, \dots, a_n]^*$  au lieu de  $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

3) Ce second usage est permis parce que  $\mathfrak{B}$  et  $\mathfrak{B}^*$  sont des bases orthonormales; s'il n'en était pas ainsi, il conviendrait d'indiquer la transposition et la dualité par des signes différents ( $T$  et  $*$ ).

4) On notera qu'alors  $\mathfrak{A}^T$  ne représente pas l'application duale (dite aussi « transposée ») de  $\mathfrak{A}$ ; celle-ci est représentée, ici, par la même matrice  $\mathfrak{A}$ ; mais, dans un cas, cette matrice pré-multiplie une colonne, dans l'autre elle post-multiplie une ligne.

5) « épreuve » au singulier, car il s'agit d'une abréviation de l'expression « catégorie des résultats d'épreuve », qui n'a rien à voir avec les « épreuves répétées » dont on a parfois voulu faire le fondement, sinon de la théorie des probabilités, du moins de ses applications; cfr. [II].

6) On notera que la moyenne du vecteur aléatoire  $\mathfrak{b}$  est un vecteur défini sans recours à une base (théorie de l'intégration dans les espaces vectoriels), de sorte que la notation  $\mathbf{E} \mathfrak{b}$  a un sens intrinsèque [il est très heureux que  $(\mathbf{E} \mathfrak{b})_p = \mathbf{E} (\mathfrak{b}_p)$ ]. L'étude intrinsèque de la covariance serait un peu moins simple.

7) On dit parfois que « des variables aléatoires normales non corrélées sont indépendantes ». Cet énoncé, pris dans toute sa généralité, est faux; il est vrai pour des aléatoires (normales, nécessairement) qui sont les composantes d'une représentation (par rapport à une base certaine) d'un vecteur multinormal.

8) Plus explicitement:  $\mathfrak{l}^* \rightarrow [\mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{l}^* \mathfrak{A} \mathfrak{b}]$ .

9) « Identiquement » par rapport à la variabilité de  $\mathfrak{b}$  dans  $\mathbf{B}$ .

10) Comme on le sait, le mot « erreur » possède, en statistique, un sens très éloigné de son sens vulgaire.

11) Il s'agit là d'une variable aléatoire; la notation appropriée à ce fait est malaisée à choisir; la convention adoptée ici a, à défaut d'autre mérite, celui d'être simple.

12) Où « red » signifie « réduction » (scil. de la somme de carrés des erreurs).

H. BRENY,  
Centre interdisciplinaire d'analyse stochastique  
et de recherche opérationnelle  
Université de Liège.

(A suivre)