Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 6 (1960)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES MODÈLES LINÉAIRES EN ANALYSE STATISTIQUE
Autor: Breny, H.
Kapitel: 1,3. Exécution des calculs.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-36336

1, 22. Théorème. *Parmi tous les estimateurs fidèles de la combinaison estimable* $\mathfrak{f}^\star\ \mathfrak{b}$, *l'estimateur privilégié a la variance minimum.*

Soit en effet $\mathfrak{m}^\star$ tel que $\mathbf{E}\, \mathfrak{m}^\star\, \mathfrak{x} = \mathfrak{f}^\star\ \mathfrak{b}$. On a, en posant $\tilde{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} - \mathbf{E}\, \mathfrak{x}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{var} \mathfrak{m}^\star \mathfrak{x} &= \mathbf{E}\, [\mathfrak{m}^\star \mathfrak{x} - \mathbf{E}\, \mathfrak{m}^\star \mathfrak{x}]\, [\mathfrak{m}^\star \mathfrak{x} - \mathbf{E}\, \mathfrak{m}^\star \mathfrak{x}] \\ &= \mathbf{E}\, (\mathfrak{m}^\star \tilde{\mathfrak{x}})\, (\tilde{\mathfrak{x}}^\star\, \mathfrak{m})^\star = \mathfrak{m}^\star\, (\mathbf{E}\, \tilde{\mathfrak{x}}\, \tilde{\mathfrak{x}}^\star)\, \mathfrak{m}\, . \end{aligned} \tag{5}$$

La définition des propriétés distributionnelles de $\mathfrak{x}$ faisant intervenir la base $\mathfrak{P}$, introduisons cette base pour un calcul explicite:

$$\mathbf{E}\, \tilde{\mathfrak{x}}\, \tilde{\mathfrak{x}}^\star = \mathbf{E}\, \tilde{\mathfrak{x}}_P\, (\tilde{\mathfrak{x}}_P)^{\mathrm{T}} = \mathbf{E} \begin{Vmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1^2 & \tilde{\mathbf{x}}_1\, \tilde{\mathbf{x}}_2 \ldots & \tilde{\mathbf{x}}_1\, \tilde{\mathbf{x}}_n \\ \vdots & & \\ \tilde{\mathbf{x}}_n\, \tilde{\mathbf{x}}_1 \ldots & & \tilde{\mathbf{x}}_n^2 \end{Vmatrix}$$

$$= \mathfrak{I}_n\, \sigma^2$$

d'où

$$\operatorname{var} \mathfrak{m}^\star \mathfrak{x} = (\mathfrak{m}^\star\, \mathfrak{m})\, \sigma^2\, .$$

Soit alors

$$\mathfrak{m}^\star = \mathfrak{l}_f^\star + \mathfrak{m}_0^\star\, ,$$

de sorte que

$$\mathfrak{l}_f^\star\, \mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}_0^\star\, \mathfrak{l}_f = 0\ ;$$

on a

$$\operatorname{var} \mathfrak{m}^\star \mathfrak{x} = (\mathfrak{l}_f^\star\, \mathfrak{l}_f)\, \sigma^2 + (\mathfrak{m}_0^\star\, \mathfrak{m}_0)\, \sigma^2 \geqslant (\mathfrak{l}_f^\star\, \mathfrak{l}_f)\, \sigma^2 = \operatorname{var} \mathfrak{l}_f^\star\, \mathfrak{x},$$

l'inégalité étant d'ailleurs stricte si $\mathfrak{m}_0^\star \neq 0$.

1, 3. *Exécution des calculs.*

1, 31. Pour l'exécution effective des calculs, il importe d'introduire une base dans chacun des espaces considérés; dans ce paragraphe, V et $\mathsf{V}^\star$ sont rapportés aux bases $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}^\star$, B et $\mathsf{B}^\star$ sont rapportés à des bases déterminées $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{H}^\star$.

1, 32. Pour que $\mathfrak{l}^\star \in \mathsf{V}_0$, il est nécessaire et suffisant que $\mathfrak{l}^\star\, \mathfrak{A} = 0$; donc

l'espace des erreurs est engendré par ceux des vecteurs de $\mathsf{V}^\star$ *qui sont orthogonaux aux colonnes de la matrice* $\mathfrak{A}$ *(plus explicitement:* $\mathfrak{A}_{P,H}$*).*

Il en résulte immédiatement que l'espace des estimatrices est engendré par les lignes de la matrice $\mathfrak{A}^T$, donc

toute estimatrice est de la forme $\mathfrak{l}^\star\, \mathfrak{A}^T\, \mathfrak{x}$.

Comme $\mathbf{E}\, \mathfrak{l}^\star\, \mathfrak{A}^T\, \mathfrak{x} = \mathfrak{l}^\star\, \mathfrak{A}^T\, \mathbf{E}\, \mathfrak{x} = \mathfrak{l}^\star\, \mathfrak{A}^T\, \mathfrak{A}\, \mathfrak{b}_H$, cet énoncé, à son tour, entraîne celui-ci:

toute combinaison estimable est de la forme $\mathfrak{l}^\star\, \mathfrak{A}^T\, \mathfrak{A}\, \mathfrak{b}_H$ *et réciproquement.*

Ainsi la correspondance biunivoque entre estimatrices et combinaisons estimables est clairement mise en évidence:

a) si $\mathfrak{f}^T\, \mathfrak{b}_H$ est estimable, il existe nécessairement un vecteur $\mathfrak{m}_f^T \in \mathbf{B}^\star$ tel que $\mathfrak{f}^T = \mathfrak{m}_f^T\, \mathfrak{A}^T\, \mathfrak{A}$;

b) l'estimateur privilégié de $\mathfrak{f}^T\, \mathfrak{b}_H$ est alors $\mathfrak{m}_f^T\, \mathfrak{A}^T\, \mathfrak{x}$ (de sorte que $\mathfrak{l}_f^\star = \mathfrak{m}_f^T\, \mathfrak{A}^T$);

c) la variance de cet estimateur vaut $[\mathfrak{m}^T\, (\mathfrak{A}^T\, \mathfrak{A})\, \mathfrak{m}]\, \sigma^2$.

1, 33. Supposons que $r = p$. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^T$, et $\mathfrak{A}^T\, \mathfrak{A}$ sont alors des matrices de rang p, et le système de dimension p en l'inconnue $\hat{\mathfrak{b}}_H$

$$\mathfrak{A}^T\, \mathfrak{A}\, \hat{\mathfrak{b}}_H = \mathfrak{A}^T\, \mathfrak{x} \tag{6}$$

détermine entièrement cette inconnue. Celle-ci jouit de la précieuse propriété que voici:

l'estimateur privilégié de $\mathfrak{f}^T\, \mathfrak{b}_H$ *n'est autre que* $\mathfrak{f}^T\, \hat{\mathfrak{b}}_H$.

En effet, soit $\mathfrak{f}^T = \mathfrak{m}_f^T\, \mathfrak{A}^T\, \mathfrak{A}$; on a

$$\mathfrak{l}_f^\star\, \mathfrak{x} = \mathfrak{m}_f^T\, \mathfrak{A}^T\, \mathfrak{x} = (\mathfrak{m}_f^T\, \mathfrak{A}^T\, \mathfrak{A})\, \hat{\mathfrak{b}}_H = \mathfrak{f}^T\, \hat{\mathfrak{b}}_H, \quad \text{q.e.d.}$$

1, 34. Si $r < p$, le système (6) ne détermine pas univoquement l'inconnue $\hat{\mathfrak{b}}_H$. Pourtant, il reste vrai que, quelle que soit la détermination choisie pour $\hat{\mathfrak{b}}_H$, l'estimateur privilégié de la combinaison estimable $\mathfrak{f}^T\, \mathfrak{b}_H$ est $\mathfrak{f}^T\, \hat{\mathfrak{b}}_H$; en d'autres termes, les premiers membres de (6) mettent en évidence r combinaisons estimables particulières qui constituent une base de $\mathbf{B}_+$.

Le système (6) est dit « système normal »; il faut évidemment se garder d'y vouloir introduire l'inverse de $\mathfrak{A}^T\, \mathfrak{A}$ lorsque $r < p$ (cfr. § 3).