Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 6 (1960)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES MODÈLES LINÉAIRES EN ANALYSE STATISTIQUE
Autor: Breny, H.
Kapitel: 1,3. Exécution des calculs.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-36336

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 19.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

1, 22. Théorème. *Parmi tous les estimateurs fidèles de la combinaison estimable* $\mathfrak{f}^\star\,\mathfrak{b}$, *l'estimateur privilégié a la variance minimum.*

Soit en effet $\mathfrak{m}^\star$ tel que $\mathbf{E}\,\mathfrak{m}^\star\,\mathfrak{x} = \mathfrak{f}^\star\,\mathfrak{b}$. On a, en posant $\tilde{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} - \mathbf{E}\,\mathfrak{x}$,

$$\begin{aligned}\operatorname{var}\mathfrak{m}^\star\,\mathfrak{x} &= \mathbf{E}\,[\mathfrak{m}^\star\,\mathfrak{x} - \mathbf{E}\,\mathfrak{m}^\star\,\mathfrak{x}]\,[\mathfrak{m}^\star\,\mathfrak{x} - \mathbf{E}\,\mathfrak{m}^\star\,\mathfrak{x}] \\ &= \mathbf{E}\,(\mathfrak{m}^\star\,\tilde{\mathfrak{x}})\,(\tilde{\mathfrak{x}}^\star\,\mathfrak{m})^\star = \mathfrak{m}^\star\,(\mathbf{E}\,\tilde{\mathfrak{x}}\,\tilde{\mathfrak{x}}^\star)\,\mathfrak{m}\,. \qquad (5)\end{aligned}$$

La définition des propriétés distributionnelles de $\mathfrak{x}$ faisant intervenir la base $\mathfrak{P}$, introduisons cette base pour un calcul explicite:

$$\mathbf{E}\,\tilde{\mathfrak{x}}\,\tilde{\mathfrak{x}}^\star = \mathbf{E}\,\tilde{\mathfrak{x}}_P\,(\tilde{\mathfrak{x}}_P)^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}\begin{Vmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1^2 & \tilde{\mathbf{x}}_1\,\tilde{\mathbf{x}}_2 \ldots & \tilde{\mathbf{x}}_1\,\tilde{\mathbf{x}}_n \\ \vdots & & \\ \tilde{\mathbf{x}}_n\,\tilde{\mathbf{x}}_1 \ldots & & \tilde{\mathbf{x}}_n^2 \end{Vmatrix}$$

$$= \mathfrak{J}_n\,\sigma^2$$

d'où

$$\operatorname{var}\mathfrak{m}^\star\,\mathfrak{x} = (\mathfrak{m}^\star\,\mathfrak{m})\,\sigma^2\,.$$

Soit alors

$$\mathfrak{m}^\star = \mathfrak{l}_f^\star + \mathfrak{m}_0^\star\,,$$

de sorte que

$$\mathfrak{l}_f^\star\,\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}_0^\star\,\mathfrak{l}_f = 0\,;$$

on a

$$\operatorname{var}\mathfrak{m}^\star\,\mathfrak{x} = (\mathfrak{l}_f^\star\,\mathfrak{l}_f)\,\sigma^2 + (\mathfrak{m}_0^\star\,\mathfrak{m}_0)\,\sigma^2 \geqslant (\mathfrak{l}_f^\star\,\mathfrak{l}_f)\,\sigma^2 = \operatorname{var}\mathfrak{l}_f^\star\,\mathfrak{x},$$

l'inégalité étant d'ailleurs stricte si $\mathfrak{m}_0^\star \neq 0$.

1, 3. *Exécution des calculs.*

1, 31. Pour l'exécution effective des calculs, il importe d'introduire une base dans chacun des espaces considérés; dans ce paragraphe, V et $\mathsf{V}^\star$ sont rapportés aux bases $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}^\star$, B et $\mathsf{B}^\star$ sont rapportés à des bases déterminées $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{H}^\star$.

1, 32. Pour que $\mathfrak{l}^\star \in \mathsf{V}_0$, il est nécessaire et suffisant que $\mathfrak{l}^\star\,\mathfrak{A} = 0$; donc

l'espace des erreurs est engendré par ceux des vecteurs de $\mathsf{V}^\star$ *qui sont orthogonaux aux colonnes de la matrice* $\mathfrak{A}$ *(plus explicitement:* $\mathfrak{A}_{P,H}$*).*

Il en résulte immédiatement que l'espace des estimatrices est engendré par les lignes de la matrice $\mathfrak{A}^T$, donc

toute estimatrice est de la forme $\mathfrak{l}^\star \mathfrak{A}^T \mathfrak{x}$.

Comme $\mathbf{E}\, \mathfrak{l}^\star \mathfrak{A}^T \mathfrak{x} = \mathfrak{l}^\star \mathfrak{A}^T \mathbf{E}\, \mathfrak{x} = \mathfrak{l}^\star \mathfrak{A}^T \mathfrak{A}\, \mathfrak{b}_H$, cet énoncé, à son tour, entraîne celui-ci:

toute combinaison estimable est de la forme $\mathfrak{l}^\star \mathfrak{A}^T \mathfrak{A}\, \mathfrak{b}_H$ *et réciproquement.*

Ainsi la correspondance biunivoque entre estimatrices et combinaisons estimables est clairement mise en évidence:

a) si $\mathfrak{f}^T \mathfrak{b}_H$ est estimable, il existe nécessairement un vecteur $\mathfrak{m}_f^T \in \mathbf{B}^\star$ tel que $\mathfrak{f}^T = \mathfrak{m}_f^T \mathfrak{A}^T \mathfrak{A}$;

b) l'estimateur privilégié de $\mathfrak{f}^T \mathfrak{b}_H$ est alors $\mathfrak{m}_f^T \mathfrak{A}^T \mathfrak{x}$ (de sorte que $\mathfrak{l}_f^\star = \mathfrak{m}_f^T \mathfrak{A}^T$);

c) la variance de cet estimateur vaut $[\mathfrak{m}^T (\mathfrak{A}^T \mathfrak{A})\, \mathfrak{m}]\, \sigma^2$.

1, 33. Supposons que $r = p$. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^T$, et $\mathfrak{A}^T \mathfrak{A}$ sont alors des matrices de rang p, et le système de dimension p en l'inconnue $\hat{\mathfrak{b}}_H$

$$\mathfrak{A}^T \mathfrak{A}\, \hat{\mathfrak{b}}_H = \mathfrak{A}^T \mathfrak{x} \tag{6}$$

détermine entièrement cette inconnue. Celle-ci jouit de la précieuse propriété que voici:

l'estimateur privilégié de $\mathfrak{f}^T \mathfrak{b}_H$ *n'est autre que* $\mathfrak{f}^T \hat{\mathfrak{b}}_H$.

En effet, soit $\mathfrak{f}^T = \mathfrak{m}_f^T \mathfrak{A}^T \mathfrak{A}$; on a

$$\mathfrak{l}_f^\star \mathfrak{x} = \mathfrak{m}_f^T \mathfrak{A}^T \mathfrak{x} = (\mathfrak{m}_f^T \mathfrak{A}^T \mathfrak{A})\, \hat{\mathfrak{b}}_H = \mathfrak{f}^T \hat{\mathfrak{b}}_H\,, \quad \text{q.e.d.}$$

1, 34. Si $r < p$, le système (6) ne détermine pas univoquement l'inconnue $\hat{\mathfrak{b}}_H$. Pourtant, il reste vrai que, quelle que soit la détermination choisie pour $\hat{\mathfrak{b}}_H$, l'estimateur privilégié de la combinaison estimable $\mathfrak{f}^T \mathfrak{b}_H$ est $\mathfrak{f}^T \hat{\mathfrak{b}}_H$; en d'autres termes, les premiers membres de (6) mettent en évidence r combinaisons estimables particulières qui constituent une base de $\mathbf{B}_+$.

Le système (6) est dit « système normal »; il faut évidemment se garder d'y vouloir introduire l'inverse de $\mathfrak{A}^T \mathfrak{A}$ lorsque $r < p$ (cfr. § 3).