

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 6 (1960)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LES MODÈLES LINÉAIRES EN ANALYSE STATISTIQUE  
**Autor:** Breny, H.  
**Kapitel:** 1,2. Estimateurs privilégiés.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-36336>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$$\mathbf{E}(\mathbf{l}^* \mathbf{x}) = \mathbf{l}^* \mathbf{E} \mathbf{x} = \mathbf{l}^* \mathbf{A} \mathbf{b}, \quad (4)$$

d'où

$$\mathfrak{E}: \mathbf{l}^* \rightarrow \mathbf{l}^* \mathbf{A} \mathbf{b} \quad . \quad ^8)$$

$\mathfrak{E}$  est évidemment de rang  $r$ .

1, 14. Le noyau de  $\mathfrak{E}$  (sous-espace  $\mathbf{V}_0$  de  $\mathbf{V}^*$  formé des vecteurs  $\mathbf{l}^*$  tels que  $\mathfrak{E} \mathbf{l}^*$  soit identiquement nul <sup>9)</sup>) est appelé «espace des erreurs» <sup>10)</sup>; il est de dimension  $n - \text{rg } \mathfrak{E} = n - r$ .

Le complément orthogonal de  $\mathbf{V}_0$  (sous-espace  $\mathbf{V}_+$  de  $\mathbf{V}^*$  formé des vecteurs  $\mathbf{m}^*$  pour lesquels  $\mathbf{m}^* \mathbf{l} = 0$  pour tout  $\mathbf{l}^* \in \mathbf{V}_0$ ) est appelé «espace des estimatrices». Une estimatrice est donc, par définition, une fonctionnelle linéaire des observations, orthogonale à toute fonctionnelle dont la moyenne est identiquement <sup>9)</sup> nulle. On remarquera que,  $\mathbf{V}^*$  étant somme directe de  $\mathbf{V}_0$  et  $\mathbf{V}_+$ , à toute fonctionnelle linéaire des observations dont la moyenne n'est pas identiquement <sup>9)</sup> nulle correspond une et une seule fonctionnelle de  $\mathbf{V}_+$  ayant identiquement <sup>9)</sup> même moyenne qu'elle.

Enfin, l'image de  $\mathfrak{E}$  (sous-espace  $\mathbf{B}_+$  de  $\mathbf{B}^*$  formé des combinaisons paramétriques  $\mathbf{b}^*$  pour lesquelles il existe un vecteur  $\mathbf{l}^* \in \mathbf{V}^*$  tel que  $\mathbf{E} \mathbf{l}^* \mathbf{x} = \mathbf{b}^* \mathbf{b}$ ) s'appelle «espace des combinaisons (paramétriques) estimables». Nous noterons  $\mathbf{B}_0$  un complément quelconque de  $\mathbf{B}_+$ .

On sait que la restriction de  $\mathfrak{E}$  à  $\mathbf{V}_+$  est un isomorphisme de  $\mathbf{V}_+$  sur  $\mathbf{B}_+$ ; on peut donc énoncer que

*toute combinaison estimable est la moyenne d'une et une seule estimatrice, et réciproquement.*

## 1, 2. Estimateurs privilégiés.

1, 21. Si l'on a, pour  $\mathbf{l}^* \in \mathbf{V}^*$ ,  $\mathbf{E} \mathbf{l}^* \mathbf{x} = \mathbf{f}^* \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{f}^* \mathbf{b}$  est évidemment une combinaison estimable, et  $\mathbf{l}^* \mathbf{x}$  en est un estimateur fidèle (au sens de la théorie statistique de l'estimation); si  $\mathbf{m}^* \in \mathbf{V}_0$ ,  $(\mathbf{l}^* + \mathbf{m}^*) \mathbf{x}$  est aussi un estimateur fidèle de  $\mathbf{f}^* \mathbf{b}$ ; pour distinguer, parmi tous ces estimateurs fidèles de  $\mathbf{f}^* \mathbf{b}$ , l'unique estimatrice, celle-ci est dite «estimateur privilégié de  $\mathbf{f}^* \mathbf{b}$ », et désignée par  $\mathbf{l}_f^* \mathbf{x}$  (donc, par définition,  $\mathbf{E} \mathbf{l}_f^* \mathbf{x} = \mathbf{f}^* \mathbf{b}$  et  $\mathbf{l}_f^* \in \mathbf{V}_+$ ).

1, 22. Théorème. *Parmi tous les estimateurs fidèles de la combinaison estimable  $f^* b$ , l'estimateur privilégié a la variance minimum.*

Soit en effet  $m^*$  tel que  $E m^* x = f^* b$ . On a, en posant  $\tilde{x} = x - E x$ ,

$$\begin{aligned} \text{var } m^* x &= E [m^* x - E m^* x] [m^* x - E m^* x] \\ &= E (m^* \tilde{x}) (\tilde{x}^* m)^* = m^* (E \tilde{x} \tilde{x}^*) m. \end{aligned} \quad (5)$$

La définition des propriétés distributionnelles de  $x$  faisant intervenir la base  $\mathfrak{P}$ , introduisons cette base pour un calcul explicite :

$$\begin{aligned} E \tilde{x} \tilde{x}^* &= E \tilde{x}_P (\tilde{x}_P)^T = E \left\| \begin{array}{cccc} \tilde{x}_1^2 & \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 & \dots & \tilde{x}_1 \tilde{x}_n \\ \vdots & & & \\ \tilde{x}_n \tilde{x}_1 & \dots & & \tilde{x}_n^2 \end{array} \right\| \\ &= \mathfrak{J}_n \sigma^2 \end{aligned}$$

d'où

$$\text{var } m^* x = (m^* m) \sigma^2.$$

Soit alors

$$m^* = l_f^* + m_0^*,$$

de sorte que

$$l_f^* m_0 = m_0^* l_f = 0;$$

on a

$$\text{var } m^* x = (l_f^* l_f) \sigma^2 + (m_0^* m_0) \sigma^2 \geq (l_f^* l_f) \sigma^2 = \text{var } l_f^* x,$$

l'inégalité étant d'ailleurs stricte si  $m_0^* \neq 0$ .

### 1, 3. Exécution des calculs.

1, 31. Pour l'exécution effective des calculs, il importe d'introduire une base dans chacun des espaces considérés; dans ce paragraphe,  $V$  et  $V^*$  sont rapportés aux bases  $\mathfrak{P}$  et  $\mathfrak{P}^*$ ,  $B$  et  $B^*$  sont rapportés à des bases déterminées  $\mathfrak{H}$  et  $\mathfrak{H}^*$ .

1, 32. Pour que  $l^* \in V_0$ , il est nécessaire et suffisant que  $l^* \mathfrak{A} = 0$ ; donc

*l'espace des erreurs est engendré par ceux des vecteurs de  $V^*$  qui sont orthogonaux aux colonnes de la matrice  $\mathfrak{A}$  (plus explicitement:  $\mathfrak{A}_{P,H}$ ).*