Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 6 (1960)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES MODÈLES LINÉAIRES EN ANALYSE STATISTIQUE
Autor: Breny, H.
Kapitel: 0, 3. Distributions multinormales.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-36336

nous poserons

$$\mathbf{C}\,\mathfrak{b}_P = \mathbf{E}\,[\mathfrak{b}_P - \mathbf{E}\,\mathfrak{b}_P]\,[\mathfrak{b}_P - \mathbf{E}\,\mathfrak{b}_P]^{\mathrm{T}} \;.$$

$\mathbf{C}\,\mathfrak{b}_P$ est une matrice carrée, symétrique; elle est appelée «matrice des covariances de $\mathfrak{b}_P$» [6]).

0, 3. *Distributions multinormales.*

0, 31. Rappelons que, si $\mathfrak{b}$ est un vecteur aléatoire multinormal, non dégénéré, de dimension n, si $\mathfrak{b}_P$ est la matrice $n \times 1$, de composantes $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$, qui le représente par rapport à une base certaine $\mathfrak{P}$, et si l'on pose

$$\mathbf{E}\,\mathfrak{b}_P = \mathfrak{m}_P \,, \quad \mathbf{C}\,\mathfrak{b}_P = \mathfrak{S}_P \,,$$

on a rg $\mathfrak{S}_P = n$ et

$$\mathbf{Pr}\,[\mathbf{b}_i \leqslant u_i \,,\; i = 1, \ldots, n] =$$

$$= (2\,\pi)^{-n/2}\,|\,\mathfrak{S}\,|^{-1/2} \int_{-\infty}^{u_1} \ldots \int_{-\infty}^{u_n} \exp\left[-\frac{1}{2}\,(\mathfrak{x} - \mathfrak{m}_P)^T\,\mathfrak{S}_P^{-1}\,(\mathfrak{x} - \mathfrak{m}_P)\right] d\,\mathfrak{x} \;.$$

0, 32. Par ailleurs, si $\mathfrak{b}$ est le vecteur décrit ci-dessus, et si $\mathfrak{a}$ est un vecteur aléatoire lié à $\mathfrak{b}$ par une transformation linéaire régulière et certaine:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{b} \quad (\mathrm{rg}\,\mathfrak{A} = n) \;,$$

$\mathfrak{a}$ est aussi un vecteur aléatoire multinormal non dégénéré, de dimension n, et on a

$$\mathbf{E}\,\mathfrak{a}_P = \mathfrak{A}_P\,\mathbf{E}\,\mathfrak{b}_P \;, \qquad \mathbf{C}\,\mathfrak{a}_P = \mathfrak{A}_P\,(\mathbf{C}\,\mathfrak{b}_P)\,\mathfrak{A}_P^T \;.$$

0, 33. Rappelons encore que, si $\mathfrak{b}$ est comme ci-dessus, les composantes $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ de $\mathfrak{b}_P$ sont des variables aléatoires normales; celles-ci sont indépendantes si, et seulement si, $\mathbf{C}\,\mathfrak{b}_P$ est une matrice diagonale [ou, ce qui revient au même, si cov $(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) = 0$, $i \neq j$ [7])]. La réalisation de cette condition, pour un $\mathfrak{b}$ donné, dépend essentiellement du choix de $\mathfrak{P}$. En fait, il est toujours possible de rapporter un vecteur multinormal à une base (certaine) telle que ses composantes soient des aléatoires indépendantes.

0, 34. Rappelons enfin que, si l'on nomme « gaussienne » toute aléatoire normale de moyenne nulle et de variance égale à 1, on a les énoncés suivants (cfr. [III], chap. 18):

a) la somme des carrés de p aléatoires gaussiennes indépendantes est une aléatoire χ^2 à p degrés de liberté (en abrégé, χ^2_p);

b) si $\mathbf{x}$ est une aléatoire gaussienne et $\mathbf{u}$ une aléatoire χ^2_p indépendante de $\mathbf{x}$, le quotient $\mathbf{x}/\sqrt{(\mathbf{u}/p)}$ est une aléatoire de Student à p degrés de liberté (en abrégé, $\mathbf{t}_p$);

c) si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont des aléatoires χ^2, respectivement à m et n degrés de liberté, indépendantes, le quotient $(\mathbf{u}/m):(\mathbf{v}/n)$ est une aléatoire $\mathbf{F}$ de Snedecor à (m, n) degrés de liberté (en abrégé, $\mathbf{F}_{m,n}$); il est souvent plus commode d'utiliser alors le fait que $\mathbf{v}/(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ est une aléatoire $\beta_{p,q}$ avec $p = n/2$, $q = m/2$, et de se référer aux tables de la distribution β (en général, en effet, $n \geqslant m$, donc $p \geqslant q$, comme dans les tables de Pearson [IV]); on notera que les grandes valeurs de $\mathbf{F}$ correspondent aux petites valeurs de β.

1. Modèles linéaires. Estimateurs.

1, 1. *Définitions.*

1, 11. Considérons une expérience aléatoire dont le résultat est un n-uple ordonné de nombres réels, toutes les valeurs a priori possibles, de $-\infty$ à $+\infty$, étant en effet à prendre en considération. Structurons l'ensemble des observations possibles en un espace vectoriel euclidien sur le corps des réels en postulant que, si $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$ et $\beta = (b_1, \ldots, b_n)$ sont deux observations, on a

pour la somme:

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \ , \tag{1}$$

pour le produit par un scalaire:

$$p\,\alpha = (p\,a_1, \ldots, p\,a_n) \ , \tag{2}$$

pour le produit scalaire:

$$< \alpha, \beta > = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n \ . \tag{3}$$