Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 6 (1960)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE PLUS PETIT COUVERCLE CIRCULAIRE DE n POINTS
Autor: Ehrhart, E.
Kapitel: Construction
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-36335

$\widehat{BDC}$ soit minimum (il est aigu et la droite BC passe entre A et D). Le cercle (O_3) circonscrit à BCD est un couvercle plus petit que (O_2).

En continuant l'opération avec le triangle BCD, etc., on arrive nécessairement à un triangle acutangle dont les sommets appartiennent à E', puisque le nombre de cercles passant par trois points de E' est limité et que les rayons des cercles successivement rencontrés vont en diminuant.

4. *Un couvercle circulaire de* E', *circonscrit à un triangle acutangle* ABC *dont les sommets appartiennent à* E', *est nécessairement le plus petit.* Il résulte en effet de ce qui précède que le plus petit couvercle des trois points A, B, C est le cercle ABC.

5. Soit ABC un triangle acutangle inscrit dans (C) et dont les sommets appartiennent à E'. Les points A, B, C partagent le contour du polygone convexe (P) construit sur E' en trois lignes brisées (AB), (BC), (CA) dont seules les extrémités appartiennent à l'ensemble des trois points A, B, C. Considérons un sommet M de (P) situé sur (AB) pour fixer les idées. Si l'angle en M de (P) était aigu, l'angle AMB le serait également, ce qui est impossible puisque le quadrilatère convexe ACBM est intérieur à (C). Donc *tout sommet d'angle aigu de* (P) *est un sommet du triangle acutangle inscrit dans* (C).

Construction

Je trace le polygone (P) enveloppe convexe des *n* points donnés. J'envisage, au besoin je construis, le cercle qui a pour diamètre le plus grand des segments de l'ensemble des côtés et des diagonales. S'il ne coupe pas (P), il est la solution (C).

Sinon, je considère les angles aigus de (P). (Il y en a trois au plus, car la somme des angles extérieurs de (P) valant 2π, il ne peut y avoir quatre angles extérieurs obtus.)

S'il en a trois, le cercle passant par leurs sommets est (C).

S'il en a deux de sommets A, B, je considère le sommet C tel que $\widehat{ACB}$ soit minimum. Le cercle ABC est (C).

Si j'aperçois un triangle acutangle dont les sommets font partie de l'ensemble E′ des sommets de (P), et dont le cercle circonscrit ne coupe (P), ce cercle est (C).

Sinon je choisis un triangle obtusangle ABC satisfaisant à ces conditions. (Si (P) a un angle aigu, je prends A en son sommet.) Si C est le sommet de l'angle obtus du triangle, je le remplace par C′, sommet de (P) tel que $\widehat{AC'B}$ soit minimum. Si AC′ B est acutangle, son cercle circonscrit est (C).

Si le cercle circonscrit au triangle obtusangle AC′ B ne porte pas d'autres points de E′, je remplace comme précédemment le sommet de l'angle obtus par le point D de E′, qui voit le côté opposé sous le plus petit angle, etc.

Si le cercle circonscrit au triangle obtusangle AC′ B porte d'autres points C″, C‴ ... de E′, et que son centre O est intérieur à l'enveloppe convexe (P′) des points A, B, C, C′, C″, C‴, ... ce cercle est (C). Si O est extérieur à (P′) et que MN est le côté de (P′) le plus voisin de O, on passe au triangle MND, D étant le point de E′ tel que $\widehat{MDN}$ soit minimum, etc.

Après un certain nombre de ces substitutions de sommets, j'arrive à un triangle acutangle. Son cercle circonscrit est (C).

E. Ehrhart,
13*a*, boulevard de Lyon,
Strasbourg.