

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 6 (1960)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROBLÈMES D'APPROXIMATION DIOPHANTIENNE
Autor: Descombes, Roger
Kapitel: 4. Méthode des suites de meilleure approximation.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-36333>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

même corps quadratique, et on peut même choisir η rationnel, égal par exemple dans les cinq cas cités plus haut respectivement à 0, $1/14$, 0, $1/90$ et $1/10$. Les valeurs $1/\sqrt{5}$ et $1/\sqrt{8}$ de $c^+(\xi, \eta)$ correspondent donc en fait aux deux premières valeurs du cas homogène; mais la limite supérieure de $c^+(\xi, \eta)$ est plus grande que la troisième valeur de $c(\xi)$ trouvée par MARKOFF.

4. MÉTHODE DES SUITES DE MEILLEURE APPROXIMATION.

Une méthode générale utilisée dans ces questions consiste à choisir parmi tous les couples d'entiers une suite de couples qui d'une part conduise à la limite inférieure notée $c(\xi)$ ou $c^+(\xi, \eta)$ selon le cas, et qui d'autre part soit suffisamment maniable par exemple calculable par récurrence.

La définition d'une telle suite est susceptible de plusieurs variantes. Dans le cas du problème homogène, MARKOFF s'est servi de la suite des réduites p_n/q_n du développement de ξ en fraction continue ordinaire, qui sont déterminées comme on sait par

$$q_{-1} = 0, \quad q_0 = 1$$

$$p_{-1} = 1, \quad p_0 = a_0 = [\xi] \quad (\text{plus grand entier } \leq \xi)$$

et

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad (n \geq 1)$$

où

$$a_n = \left[x_n = -\frac{q_{n-2}\xi - p_{n-2}}{q_{n-1}\xi - p_{n-1}} \right].$$

Du point de vue de l'approximation, la qualité essentielle de la suite (p_n, q_n) tient à la propriété suivante, valable pour tous les couples d'entiers (p, q) :

si $(p, q) \neq (0, 0)$ et $|q\xi - p| < |q_n\xi - p_n|$, alors $|q| \geq q_{n+1}$.

Cette propriété, que nous traduirons en disant que la suite (p_n, q_n) est une *suite de meilleure approximation* pour ξ , implique évidemment

$$c(\xi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n |q_n\xi - p_n|.$$

Quant à la maniabilité, en introduisant

$$y_n = -\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} \quad (n \geq 1),$$

on trouve, compte tenu de $|p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n| = 1$,

$$c(\xi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n + y_n}$$

avec les formules de récurrence

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n - a_n}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{y_n - a_n}, \quad a_n = [x_n]$$

qui peuvent s'écrire par la notation traditionnelle des fractions continues

$$x_n = a_n + \cfrac{1}{a_{n+1} + \cfrac{1}{a_{n+2} + \dots}} \quad y_n = -\cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_{n-2} + \dots + \cfrac{1}{a_1}}}$$

Ainsi, $c(\xi)$ est entièrement déterminé par la donnée, à partir d'un rang arbitraire, de la suite des entiers a_n , tous positifs, sauf peut-être a_0 ; cette suite est le *développement de ξ en fraction continue*. A toute suite infinie d'entiers positifs correspond d'ailleurs un irrationnel ξ dont elle est le développement en fraction continue, et les grandes valeurs de $c(\xi)$ [disons $c(\xi) \geq \frac{1}{3}$] ne s'obtiennent que dans les cas où les a_n sont, à partir d'un certain rang, tous égaux à 1 ou 2, comme le montrent les inégalités

$$x_n > a_n \quad \text{et} \quad -1 \leq y_n \leq 0.$$

De façon plus précise, on vérifie sans peine que si $c(\xi) > \frac{6}{17}$, tous les a_n sont, à partir d'un certain rang, égaux à 1 auquel cas $c(\xi) = \frac{1}{\sqrt{5}}$, ou égaux à 2 auquel cas $c(\xi) = \frac{1}{\sqrt{8}}$: on obtient ainsi les deux valeurs trouvées par KORKINE et ZOLOTAREFF. Un examen beaucoup plus détaillé, mais fondé sur une technique analogue, a fourni à MARKOFF les résultats indiqués plus haut.

En outre, l'équivalence de deux irrationnels ξ et ξ' se caractérise par l'identité de leurs développements en fraction continue,

à partir de rangs convenables; ξ , qu'on peut noter x_0 , est en particulier équivalent à tous les x_n . Enfin la périodicité (à partir d'un certain rang) de la suite des a_n caractérise les irrationnels ξ quadratiques.

5. TECHNIQUE DU CAS NON HOMOGÈNE.

A la suite de méthodes analogues proposées par divers auteurs (notamment MORIMOTO), CASSELS a utilisé pour le cas non homogène une suite de quadruplets d'entiers (u_n, v_n, u'_n, v'_n) qu'on peut encore appeler suite de meilleure approximation du couple (ξ, η) en ce sens que

$$c^+(\xi, \eta) = \inf \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} |v_n \xi - u_n - \eta|, \lim_{n \rightarrow +\infty} |v'_n \xi - u'_n - \eta| \right].$$

En conservant les mêmes notations que ci-dessus pour le développement de l'irrationnel ξ en fraction continue, et en posant

$$z_{n+1} = \frac{v_n \xi - u_n - \eta}{q_n \xi - p_n} \quad \text{et} \quad t_{n+1} = \frac{v_n}{q_n},$$

on obtient $c^+(\xi, \eta)$ par

$$c^+(\xi, \eta) = \inf \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{z_n t_n}{x_n - y_n}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(x - z_n)(t_n - y_n)}{x_n - y_n} \right]$$

avec les formules de récurrence

$$\frac{z_{n+1}}{x_{n+1}} = x_n - z_n - b_n \quad \frac{t_{n+1}}{y_{n+1}} = y_n - t_n - b_n \quad b_n = [x_n - z_n]$$

à moins que $b_{n-1} = a_{n-1}$, auquel cas ces formules de récurrence doivent être remplacées par

$$\frac{z_{n+1}}{x_{n+1}} = 1 - z_n \quad \frac{t_{n+1}}{y_{n+1}} = 1 - t_n.$$

Ainsi $c^+(\xi, \eta)$ est entièrement déterminé par la donnée, à partir d'un rang arbitraire, de la suite des couples d'entiers (a_n, b_n) (à l'exception des rangs n tels que $b_{n-1} = a_{n-1}$, pour lesquels b_n n'est pas défini); cette suite est le *développement du*