Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 6 (1960)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROBLÈMES D'APPROXIMATION DIOPHANTIENNE

Autor: Descombes, Roger

Kapitel: 4. Méthode des suites de meilleure approximation.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-36333

même corps quadratique, et on peut même choisir η rationnel, égal par exemple dans les cinq cas cités plus haut respectivement à 0, 1/14, 0, 1/90 et 1/10. Les valeurs $1/\sqrt{5}$ et $1/\sqrt{8}$ de $c^+(\xi, \eta)$ correspondent donc en fait aux deux premières valeurs du cas homogène; mais la limite supérieure de $c^+(\xi, \eta)$ est plus grande que la troisième valeur de $c(\xi)$ trouvée par Markoff.

4. Méthode des suites de meilleure approximation.

Une méthode générale utilisée dans ces questions consiste à choisir parmi tous les couples d'entiers une suite de couples qui d'une part conduise à la limite inférieure notée $c(\xi)$ ou $c^+(\xi, \eta)$ selon le cas, et qui d'autre part soit suffisamment maniable par exemple calculable par récurrence.

La définition d'une telle suite est susceptible de plusieurs variantes. Dans le cas du problème homogène, Markoff s'est servi de la suite des réduites p_n/q_n du développement de ξ en fraction continue ordinaire, qui sont déterminées comme on sait par

$$q_{-1} = 0, \qquad q_0 = 1$$

$$p_{-1} = 1, \qquad p_0 = a_0 = [\xi] \quad (\text{plus grand entier} \leqslant \xi)$$

et

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \qquad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \qquad (n \geqslant 1)$$

où

$$a_n = \left[x_n = - \frac{q_{n-2}\,\xi - p_{n-2}}{q_{n-1}\,\xi - p_{n-1}} \right].$$

Du point de vue de l'approximation, la qualité essentielle de la suite (p_n, q_n) tient à la propriété suivante, valable pour tous les couples d'entiers (p, q):

si $(p, q) \neq (0, 0)$ et $|q\xi - p| < |q_n \xi - p_n|$, alors $|q| \geqslant q_{n+1}$.

Cette propriété, que nous traduirons en disant que la suite (p_n, q_n) est une *suite de meilleure approximation* pour ξ, implique évidemment

$$c(\xi) = \varliminf_{n \to +\infty} q_n \, |q_n \xi - p_n|.$$

Quant à la maniabilité, en introduisant

$$y_n = -\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} \qquad (n \geqslant 1) ,$$

on trouve, compte tenu de $| p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n | = 1$,

$$c(\xi) = \varlimsup_{n \to +\infty} \frac{1}{x_n + y_n}$$

avec les formules de récurrence

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n - a_n}, \qquad y_{n+1} = \frac{1}{y_n - a_n}, \qquad a_n = [x_n]$$

qui peuvent s'écrire par la notation traditionnelle des fractions continues

$$x_n = a_n + \cfrac{1}{a_{n+1} + \cfrac{1}{a_{n+2} + \dots}} \qquad y_n = -\cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_{n-2} + \dots + \cfrac{1}{a_1}}}$$

Ainsi, $c(\xi)$ est entièrement déterminé par la donnée, à partir d'un rang arbitraire, de la suite des entiers a_n, tous positifs, sauf peut-être a_0; cette suite est le *développement de* ξ en fraction continue. A toute suite infinie d'entiers positifs correspond d'ailleurs un irrationnel ξ dont elle est le développement en fraction continue, et les grandes valeurs de $c(\xi)$ $\left[\text{disons } c(\xi) \geqslant \frac{1}{3}\right]$ ne s'obtiennent que dans les cas où les a_n sont, à partir d'un certain rang, tous égaux à 1 ou 2, comme le montrent les inégalités

$$x_n > a_n \qquad \text{et} \qquad -1 \leqq y_n \leqq 0 .$$

De façon plus précise, on vérifie sans peine que si $c(\xi) > \frac{6}{17}$, tous les a_n sont, à partir d'un certain rang, égaux à 1 auquel cas $c(\xi) = \frac{1}{\sqrt{5}}$, ou égaux à 2 auquel cas $c(\xi) = \frac{1}{\sqrt{8}}$: on obtient ainsi les deux valeurs trouvées par KORKINE et ZOLOTAREFF. Un examen beaucoup plus détaillé, mais fondé sur une technique analogue, a fourni à MARKOFF les résultats indiqués plus haut.

En outre, l'équivalence de deux irrationnels ξ et ξ' se caractérise par l'identité de leurs développements en fraction continue, à partir de rangs convenables; ξ, qu'on peut noter x_0, est en particulier équivalent à tous les x_n. Enfin la périodicité (à partir d'un certain rang) de la suite des a_n caractérise les irrationnels ξ quadratiques.

5. Technique du cas non homogène.

A la suite de méthodes analogues proposées par divers auteurs (notamment Morimoto), Cassels a utilisé pour le cas non homogène une suite de quadruplets d'entiers (u_n, v_n, u'_n, v'_n) qu'on peut encore appeler suite de meilleure approximation du couple (ξ, η) en ce sens que

$$c^+(\xi, \eta) = \inf \left[\lim_{n \to +\infty} v_n \left| v_n \xi - u_n - \eta \right|, \lim_{n \to +\infty} v'_n \left| v'_n \xi - u'_n - \eta \right| \right].$$

En conservant les mêmes notations que ci-dessus pour le développement de l'irrationnel ξ en fraction continue, et en posant

$$z_{n+1} = \frac{v_n \xi - u_n - \eta}{q_n \xi - p_n} \quad \text{et} \quad t_{n+1} = \frac{v_n}{q_n},$$

on obtient $c^+(\xi, \eta)$ par

$$c^+(\xi, \eta) = \inf \left[\lim_{n \to +\infty} \frac{z_n t_n}{x_n - y_n}, \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{(\varkappa - z_n)(t_n - y_n)}{x_n - y_n} \right]$$

avec les formules de récurrence

$$\frac{z_{n+1}}{x_{n+1}} = x_n - z_n - b_n \qquad \frac{t_{n+1}}{y_{n+1}} = y_n - t_n - b_n \qquad b_n = [x_n - z_n]$$

à moins que $b_{n-1} = a_{n-1}$, auquel cas ces formules de récurrence doivent être remplacées par

$$\frac{z_{n+1}}{x_{n+1}} = 1 - z_n \qquad \frac{t_{n+1}}{y_{n+1}} = 1 - t_n .$$

Ainsi $c^+(\xi, \eta)$ est entièrement déterminé par la donnée, à partir d'un rang arbitraire, de la suite des couples d'entiers (a_n, b_n) (à l'exception des rangs n tels que $b_{n-1} = a_{n-1}$, pour lesquels b_n n'est pas défini); cette suite est le *développement du*