Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 6 (1960)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROBLÈMES D'APPROXIMATION DIOPHANTIENNE

Autor: Descombes, Roger

Kapitel: 2. Le cas homogène; rappel des résultats.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-36333

PROBLÈMES D'APPROXIMATION DIOPHANTIENNE [1]

par Roger DESCOMBES

(Reçu le 20 juillet 1960)

1. INTRODUCTION.

Considérons une circonférence de longueur un. A partir d'une origine O sur cette circonférence, marquons les extrémités des arcs dont les longueurs sont les multiples entiers positifs successifs d'un nombre *irrationnel* ξ. Nous nous proposons d'étudier de quelle façon un point fixe P quelconque de la circonférence, d'abscisse curviligne η, est approché par les sommets de la ligne polygonale régulière non fermée ainsi constituée. Si P est un sommet de la ligne polygonale, éventuellement prolongée du côté des multiples négatifs de ξ, c'est-à-dire si $\eta \equiv q\,\xi \pmod{1}$ (q entier), P est approché de la même façon que O; nous dirons alors qu'on a affaire au cas homogène. Si cette circonstance ne se produit pas, nous dirons qu'il s'agit du cas non homogène.

2. LE CAS HOMOGÈNE; RAPPEL DES RÉSULTATS.

Dans le cas homogène, la symétrisation de la ligne polygonale par rapport au diamètre passant par O, c'est-à-dire l'introduction des multiples $q\xi$, avec q entier négatif, est sans importance. D'autre part, on sait depuis longtemps (méthode des tiroirs de DIRICHLET, 1840) que pour une infinité de couples d'entiers p, q ($q \neq 0$), on a $|\,q\,(q\xi - p)\,| < 1$. Il est donc commode d'exprimer les résultats à l'aide de la fonction définie sur les irrationnels par

$$c\,(\xi) = \underline{\lim}\ |\,q\,(q\,\xi - p)\,| \qquad (\xi \text{ irrationnel})$$

[1]) Conférence prononcée à Grenoble dans le cadre des « Journées Mathématiques de Grenoble », 21-22 mai 1960.

où la limite inférieure est prise pour l'ensemble de tous les couples d'entiers p, q tels que $q \neq 0$. MARKOFF a prouvé en 1879 *(Math. Annalen)* que $c(\xi)$ prend, entre sa borne supérieure $1/\sqrt{5}$ et sa limite supérieure $1/3$ une infinité de valeurs isolées, lorsque ξ décrit l'ensemble des irrationnels. Les deux premières de ces valeurs isolées, $1/\sqrt{5}$ et $1/\sqrt{8}$, avaient été communiquées peu auparavant par KORKINE et ZOLOTAREFF à MARKOFF, mais ce dernier a fourni un procédé récurrent pour les obtenir toutes. Elles sont de la forme

$$\left(9 - \frac{4}{m_n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

où l'entier m_n, qui tend vers l'infini avec n, prend les valeurs successives

$$1,\ 2,\ 5,\ 13,\ 29,\ 34,\ 89,\ 169,\ 194,\ 233,\ 433,\ \ldots$$

Ces valeurs sont tous les entiers positifs qui, associés en triplets convenables, constituent les solutions en nombres entiers de l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3\,x\,y\,z\,.$$

En outre, chacune des valeurs de $c(\xi)$ strictement supérieures à $1/3$ n'est obtenue que par des irrationnels ξ *équivalents* à l'un quelconque d'entre eux, c'est-à-dire déduits de ce dernier par une transformation homographique à coefficients entiers de déterminant égal à ± 1. Ces nombres ξ sont de plus tous quadratiques.

3. Résultats dans le cas non homogène.

Dans le cas non homogène, la symétrisation de la ligne polygonale n'est plus indifférente, car elle équivaut au remplacement de η par $-\eta$. Plus précisément, en introduisant la fonction

$$c(\xi, \eta) = \underline{\lim}_{v \neq 0} \left| v\,(v\,\xi - u - \eta) \right| \qquad (\xi \text{ irrationnel, } \eta \text{ réel})$$

où la limite inférieure est prise pour l'ensemble de tous les couples d'entiers, u, v tels que $v \neq 0$, et la fonction

$$c^+(\xi, \eta) = \underline{\lim}_{v > 0} v \left| v\,\xi - u - \eta \right| \qquad (\xi \text{ irrationnel, } \eta \text{ réel})$$