

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 6 (1960)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROBLÈMES D'APPROXIMATION DIOPHANTIENNE
Autor: Descombes, Roger
Kapitel: 2. Le cas homogène; rappel des résultats.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-36333>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

PROBLÈMES D'APPROXIMATION DIOPHANTIENNE¹

par Roger DESCOMBES

(Reçu le 20 juillet 1960)

1. INTRODUCTION.

Considérons une circonference de longueur un. A partir d'une origine O sur cette circonference, marquons les extrémités des arcs dont les longueurs sont les multiples entiers positifs successifs d'un nombre *irrationnel* ξ . Nous nous proposons d'étudier de quelle façon un point fixe P quelconque de la circonference, d'abscisse curviligne η , est approché par les sommets de la ligne polygonale régulière non fermée ainsi constituée. Si P est un sommet de la ligne polygonale, éventuellement prolongée du côté des multiples négatifs de ξ , c'est-à-dire si $\eta \equiv q \xi \pmod{1}$ (q entier), P est approché de la même façon que O; nous dirons alors qu'on a affaire au cas homogène. Si cette circonstance ne se produit pas, nous dirons qu'il s'agit du cas non homogène.

2. LE CAS HOMOGENE; RAPPEL DES RÉSULTATS.

Dans le cas homogène, la symétrisation de la ligne polygonale par rapport au diamètre passant par O, c'est-à-dire l'introduction des multiples $q\xi$, avec q entier négatif, est sans importance. D'autre part, on sait depuis longtemps (méthode des tiroirs de DIRICHLET, 1840) que pour une infinité de couples d'entiers p, q ($q \neq 0$), on a $|q(q\xi - p)| < 1$. Il est donc commode d'exprimer les résultats à l'aide de la fonction définie sur les irrationnels par

$$c(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} |q(q\xi - p)| \quad (\xi \text{ irrationnel})$$

¹) Conférence prononcée à Grenoble dans le cadre des « Journées Mathématiques de Grenoble », 21-22 mai 1960.

où la limite inférieure est prise pour l'ensemble de tous les couples d'entiers p, q tels que $q \neq 0$. MARKOFF a prouvé en 1879 (*Math. Annalen*) que $c(\xi)$ prend, entre sa borne supérieure $1/\sqrt{5}$ et sa limite supérieure $1/3$ une infinité de valeurs isolées, lorsque ξ décrit l'ensemble des irrationnels. Les deux premières de ces valeurs isolées, $1/\sqrt{5}$ et $1/\sqrt{8}$, avaient été communiquées peu auparavant par KORKINE et ZOLOTAREFF à MARKOFF, mais ce dernier a fourni un procédé récurrent pour les obtenir toutes. Elles sont de la forme

$$\left(9 - \frac{4}{m_n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

où l'entier m_n , qui tend vers l'infini avec n , prend les valeurs successives

$$1, 2, 5, 13, 29, 34, 89, 169, 194, 233, 433, \dots$$

Ces valeurs sont tous les entiers positifs qui, associés en triplets convenables, constituent les solutions en nombres entiers de l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz.$$

En outre, chacune des valeurs de $c(\xi)$ strictement supérieures à $1/3$ n'est obtenue que par des irrationnels ξ équivalents à l'un quelconque d'entre eux, c'est-à-dire déduits de ce dernier par une transformation homographique à coefficients entiers de déterminant égal à ± 1 . Ces nombres ξ sont de plus tous quadratiques.

3. RÉSULTATS DANS LE CAS NON HOMOGÈNE.

Dans le cas non homogène, la symétrisation de la ligne polygonale n'est plus indifférente, car elle équivaut au remplacement de η par $-\eta$. Plus précisément, en introduisant la fonction

$$c(\xi, \eta) = \lim_{\nu \neq 0} |\nu(\nu\xi - u - \eta)| \quad (\xi \text{ irrationnel}, \eta \text{ réel})$$

où la limite inférieure est prise pour l'ensemble de tous les couples d'entiers, u, ν tels que $\nu \neq 0$, et la fonction

$$c^+(\xi, \eta) = \lim_{\nu > 0} \nu |\nu\xi - u - \eta| \quad (\xi \text{ irrationnel}, \eta \text{ réel})$$