II. La cinématique du point.

4. *Interprétation.*

Les formules (3. 4) des transformations propres spéciales de Lorentz peuvent être interprétées en termes classiques d'espace et de temps.

Supposons que le point $M \in V_4$ ait une projection d'espace liée au repère $(\vec{e}'_\alpha)$, c'est-à-dire telle que les x'_i restent constants. On aura en différentiant la seconde équation de (3. 4a)

$$dx_1 - \beta dx_0 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \beta = \frac{dx_1}{dx_0}$$

En revenant à la variable t $(x_0 = ct)$, on voit que $\beta = \frac{v}{c}$, v désigne la vitesse d'un point lié au repère de Galilée $(0', \vec{e}'_i)$ dans son mouvement par rapport au repère de Galilée $(0, \vec{e}_i)$. Comme $x'_2 = x_2$, $x'_3 = x_3$, $\vec{e}'_2 = \vec{e}_2$ et $\vec{e}'_3 = \vec{e}_3$. Par suite le second repère de Galilée a ses axes $O'y'$ et $O'z'$ de même direction et de même sens que les axes Oy et Oz du premier repère de Galilée, l'axe $O'x'$ étant orienté dans le sens de Ox glisse sur Ox avec la vitesse constante v.

Pour β petit, on obtient en première approximation les formules des transformations de Galilée

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z\,. \end{aligned}$$

Des formules de la transformation spéciale de Lorentz (3. 4), on peut déduire une formule intrinsèque en langage classique. Il est clair que

$$\vec{e}_1 = \vec{e}'_1 = \frac{\vec{\beta}}{\beta}$$

β étant le vecteur vitesse réduite. Soit $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ le vecteur d'espace de composantes x_i $(i = 1, 2, 3)$ dans le premier repère de Galilée et $\vec{r}' = \overrightarrow{O'M}$ le vecteur homologue de composantes x_i' dans le second repère de Galilée. Nous avons

$$x_1' = \vec{r}' \cdot \vec{e}_1 = \frac{\vec{r}' \cdot \vec{\beta}}{\beta}$$

Il vient de la première équation (3. 4b)

$$x_0 = \frac{x_0' + \vec{r}' \cdot \vec{\beta}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{4. 1}$$

puis des trois équations suivantes, en formant la combinaison $\Sigma x_i \vec{e}_i = \vec{r}$:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \left(\frac{\beta x_0' + x_1'}{\sqrt{1 - \beta^2}} - x_1' \right) \vec{e}^1$$

soit

$$\vec{r} = \vec{r}' + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) \frac{\vec{r}' \cdot \vec{\beta}}{\beta^2} \vec{\beta} + \frac{x_0'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \vec{\beta} \, . \tag{4. 2}$$

On établit de même les formules inverses:

$$x_0' = \frac{x_0 - \vec{\beta} \cdot \vec{r}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{4.3}$$

$$\vec{r}' = \vec{r} + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) \frac{\vec{r} \cdot \vec{\beta}}{\beta^2} \vec{\beta} - \frac{x_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \vec{\beta} \tag{4.4}$$

Les formules (4. 1) et (4. 2) sous forme vectorielle ne dépendent pas des rotations spatiales portant sur l'un ou l'autre repère de Galilée. Elles constituent donc l'interprétation en termes classiques de la transformation propre la plus générale de Lorentz. On notera cependant que cette interprétation est faite dans la variété numérique V_4 non organisée, l'espace seul est l'espace euclidien, le temps est un paramètre scalaire.

Les formules de transformation propre de Lorentz permettent de calculer l'espace et le temps définis dans un repère de Galilée par le principe de constance de vitesse, lorsqu'on connaît son mouvement par rapport à un autre repère de Galilée et l'espace et le temps définis dans celui-ci.