Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 5 (1959)

Heft: 4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR QUELQUES PRINCIPES EXTRÉMAUX DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

Autor: Hersch, Joseph

Kapitel: 1. Introduction.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-35495

SUR QUELQUES PRINCIPES EXTRÉMAUX DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE [1]

par Joseph HERSCH, Institut Battelle, Genève

(Reçu le 25 octobre 1959.)

1. INTRODUCTION.

Je voudrais attirer votre attention sur quelques aspects de deux problèmes de physique mathématique: le *problème de Dirichlet* et celui de la *fréquence fondamentale d'une membrane vibrante.* Il s'agira surtout des principes extrémaux liés à ces problèmes.

1. 1. *Un problème de Dirichlet.*

Nous considérons la solution $\varphi(x, y)$ du problème aux limites (fig. 1):

$$\Delta\varphi = 0 \text{ dans G}; \quad \begin{array}{l} \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \\ \varphi = 1 \text{ sur } \Gamma_1 \end{array};$$

nous nous intéressons particulièrement à l'intégrale de Dirichlet

$$D(\varphi) = \iint_G \operatorname{grad}^2 \varphi \, dxdy \, .$$

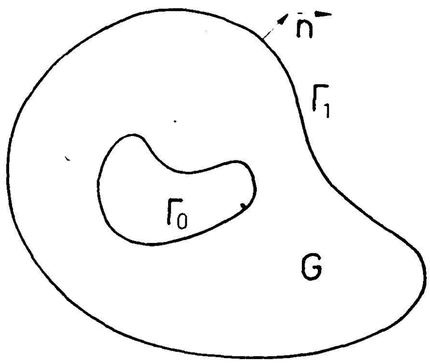

Fig. 1

Cette grandeur peut être évaluée dans les deux sens à l'aide des deux principes suivants:

Principe de Dirichlet:

Soit $v(x, y)$ une fonction continue et lisse par morceaux dans G, et telle que

$$\begin{array}{l} v = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \\ v = 1 \text{ sur } \Gamma_1 \end{array};$$

alors $\quad D(\varphi) \leqslant D(v)$.

Principe de Thomson:

Soit $\vec{p}(x, y)$ un champ vectoriel dans G, sans sources: $\operatorname{div} \vec{p} = 0$; alors

$$D(\varphi) \geqslant \frac{\left(\oint_{\Gamma_1} \vec{p} \cdot \vec{n} \, ds\right)^2}{\iint\limits_G \vec{p}^{\,2} \, dxdy} \, .$$

[1] Leçon inaugurale à l'École polytechnique fédérale (Zurich), le 31 janvier 1959.

1. 2. *La vibration fondamentale d'une membrane.*

Dans un domaine G de contour Γ, nous cherchons un nombre positif λ_1 et une fonction $\varphi(x, y)$ deux fois continûment dérivable, tels que $\Delta\varphi + \lambda_1 \varphi = 0$ et $\varphi > 0$ dans G, $\varphi = 0$ sur Γ.

$\sqrt{\lambda_1}$ est la fréquence fondamentale, φ la première fonction propre.

Principe de Rayleigh:	
Soit $v(x, y)$ une fonction continue et lisse par morceaux dans G, qui s'annule sur Γ; alors $$\lambda_1 \leqslant R[v] = \frac{D(v)}{\iint_G v^2\,dxdy} \cdot$$	*Existe-t-il un principe « du type Thomson » ?* $$\lambda_1 \geqslant ?$$

2. La conductibilité électrique d'une plaque homogène.

Considérons le domaine G (fig. 1) comme une plaque homogène de résistance spécifique $\rho = 1$, bordée par deux électrodes Γ_0 et Γ_1; appelons $\varphi(x, y)$ le potentiel au point (x, y); on impose les potentiels 0 sur Γ_0 et 1 sur Γ_1 (différence de potentiel $V = 1$). Comme $\rho = 1$, on a la densité de courant $\vec{i} = \operatorname{grad} \varphi$; la conservation de la charge s'exprime par $0 = \operatorname{div} \vec{i} = \Delta\varphi$. On voit donc que *le potentiel φ est la solution du problème de Dirichlet du* § 1. 1.

Comme $\rho = 1$ et $V = 1$, la chaleur de Joule dégagée par seconde est

$$J = \iint_G \vec{i}^2\,dxdy = D(\varphi) = \oint_{\Gamma_1} \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,ds = \oint_{\Gamma_1} \vec{i}\cdot\vec{n}\,ds = I,$$

où I désigne l'intensité totale et $\vec{n}$ la normale extérieure.

La résistance totale est

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{I} \cdot$$