

Zeitschrift:	L'Enseignement Mathématique
Herausgeber:	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band:	5 (1959)
Heft:	4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 Artikel:	 SUR QUELQUES PRINCIPES EXTRÉMAUX DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE
Autor:	Hersch, Joseph
Kapitel:	1. Introduction.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-35495

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR QUELQUES PRINCIPES EXTRÉMAUX DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE¹⁾

par Joseph HERSCH, Institut Battelle, Genève

(Reçu le 25 octobre 1959.)

1. INTRODUCTION.

Je voudrais attirer votre attention sur quelques aspects de deux problèmes de physique mathématique: le *problème de Dirichlet* et celui de la *fréquence fondamentale d'une membrane vibrante*. Il s'agira surtout des principes extrémaux liés à ces problèmes.

1. 1. *Un problème de Dirichlet.*

Nous considérons la solution $\varphi(x, y)$ du problème aux limites (fig. 1):

$$\Delta\varphi = 0 \text{ dans } G; \quad \begin{cases} \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \\ \varphi = 1 \text{ sur } \Gamma_1 \end{cases};$$

nous nous intéressons particulièrement à l'intégrale de Dirichlet

$$D(\varphi) = \iint_G \text{grad}^2 \varphi \, dx \, dy.$$

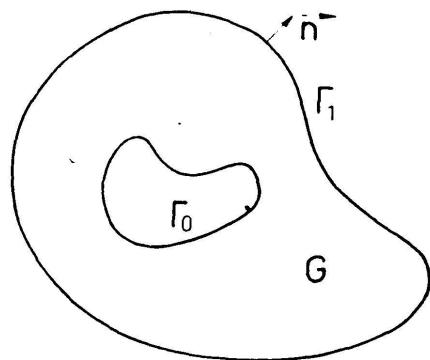


Fig. 1

Cette grandeur peut être évaluée dans les deux sens à l'aide des deux principes suivants:

Principe de Dirichlet:

Soit $\varphi(x, y)$ une fonction continue et lisse par morceaux dans G , et telle que

$$\begin{cases} \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \\ \varphi = 1 \text{ sur } \Gamma_1 \end{cases};$$

alors $D(\varphi) \leq D(\varphi)$.

Principe de Thomson:

Soit $\vec{p}(x, y)$ un champ vectoriel dans G , sans sources: $\text{div } \vec{p} = 0$; alors

$$D(\varphi) \geq \frac{\left(\oint_{\Gamma_1} \vec{p} \cdot \vec{n} \, ds \right)^2}{\iint_G \vec{p}^2 \, dx \, dy}.$$

¹⁾ Leçon inaugurale à l'École polytechnique fédérale (Zurich), le 31 janvier 1959.

1. 2. *La vibration fondamentale d'une membrane.*

Dans un domaine G de contour Γ , nous cherchons un nombre positif λ_1 et une fonction $\varphi(x, y)$ deux fois continûment dérivable, tels que $\Delta\varphi + \lambda_1 \varphi = 0$ et $\varphi > 0$ dans G , $\varphi = 0$ sur Γ .

$\sqrt{\lambda_1}$ est la fréquence fondamentale, φ la première fonction propre.

Principe de Rayleigh :

Soit $\varphi(x, y)$ une fonction continue et lisse par morceaux dans G , qui s'annule sur Γ ; alors

$$\lambda_1 \leq R[\varphi] = \frac{D(\varphi)}{\iint_G \varphi^2 dx dy}.$$

Existe-t-il un principe « du type Thomson » ?

$$\lambda_1 \geq ?$$

2. LA CONDUCTIBILITÉ ÉLECTRIQUE D'UNE PLAQUE HOMOGÈNE.

Considérons le domaine G (fig. 1) comme une plaque homogène de résistance spécifique $\rho = 1$, bordée par deux électrodes Γ_0 et Γ_1 ; appelons $\varphi(x, y)$ le potentiel au point (x, y) ; on impose les potentiels 0 sur Γ_0 et 1 sur Γ_1 (différence de potentiel $V = 1$). Comme $\rho = 1$, on a la densité de courant $\vec{i} = \text{grad } \varphi$; la conservation de la charge s'exprime par $0 = \text{div } \vec{i} = \Delta\varphi$. On voit donc que *le potentiel φ est la solution du problème de Dirichlet du § 1. 1.*

Comme $\rho = 1$ et $V = 1$, la chaleur de Joule dégagée par seconde est

$$J = \iint_G \vec{i}^2 dx dy = D(\varphi) = \oint_{\Gamma_1} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \oint_{\Gamma_1} \vec{i} \cdot \vec{n} ds = I,$$

où I désigne l'intensité totale et \vec{n} la normale extérieure.

La résistance totale est

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{I}.$$