

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 5 (1959)
Heft: 4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR QUELQUES PRINCIPES EXTRÉMAUX DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE
Autor: Hersch, Joseph
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-35495>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR QUELQUES PRINCIPES EXTRÉMAUX DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE¹⁾

par Joseph HERSCH, Institut Battelle, Genève

(Reçu le 25 octobre 1959.)

1. INTRODUCTION.

Je voudrais attirer votre attention sur quelques aspects de deux problèmes de physique mathématique: le *problème de Dirichlet* et celui de la *fréquence fondamentale d'une membrane vibrante*. Il s'agira surtout des principes extrémaux liés à ces problèmes.

1. 1. *Un problème de Dirichlet.*

Nous considérons la solution $\varphi(x, y)$ du problème aux limites (fig. 1):

$$\begin{aligned}\Delta\varphi = 0 \text{ dans } G; \quad \varphi &= 0 \text{ sur } \Gamma_0 \\ \varphi &= 1 \text{ sur } \Gamma_1\end{aligned};$$

nous nous intéressons particulièrement à l'intégrale de Dirichlet

$$D(\varphi) = \iint_G \text{grad}^2 \varphi \, dx \, dy.$$

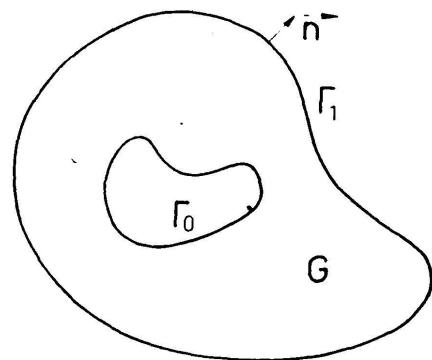


Fig. 1

Cette grandeur peut être évaluée dans les deux sens à l'aide des deux principes suivants:

Principe de Dirichlet:

Soit $\varphi(x, y)$ une fonction continue et lisse par morceaux dans G , et telle que

$$\begin{aligned}\varphi &= 0 \text{ sur } \Gamma_0 \\ \varphi &= 1 \text{ sur } \Gamma_1\end{aligned};$$

alors $D(\varphi) \leq D(\varphi)$.

Principe de Thomson:

Soit $\vec{p}(x, y)$ un champ vectoriel dans G , sans sources: $\text{div } \vec{p} = 0$; alors

$$D(\varphi) \geq \frac{\left(\oint_{\Gamma_1} \vec{p} \cdot \vec{n} \, ds \right)^2}{\iint_G \vec{p}^2 \, dx \, dy}.$$

¹⁾ Leçon inaugurale à l'École polytechnique fédérale (Zurich), le 31 janvier 1959.

1. 2. *La vibration fondamentale d'une membrane.*

Dans un domaine G de contour Γ , nous cherchons un nombre positif λ_1 et une fonction $\varphi(x, y)$ deux fois continûment dérivable, tels que $\Delta\varphi + \lambda_1 \varphi = 0$ et $\varphi > 0$ dans G , $\varphi = 0$ sur Γ .

$\sqrt{\lambda_1}$ est la fréquence fondamentale, φ la première fonction propre.

Principe de Rayleigh:

Soit $\varphi(x, y)$ une fonction continue et lisse par morceaux dans G , qui s'annule sur Γ ; alors

$$\lambda_1 \leq R[\varphi] = \frac{D(\varphi)}{\iint_G \varphi^2 dx dy}.$$

Existe-t-il un principe « du type Thomson » ?

$$\lambda_1 \geq ?$$

2. LA CONDUCTIBILITÉ ÉLECTRIQUE D'UNE PLAQUE HOMOGÈNE.

Considérons le domaine G (fig. 1) comme une plaque homogène de résistance spécifique $\rho = 1$, bordée par deux électrodes Γ_0 et Γ_1 ; appelons $\varphi(x, y)$ le potentiel au point (x, y) ; on impose les potentiels 0 sur Γ_0 et 1 sur Γ_1 (différence de potentiel $V = 1$). Comme $\rho = 1$, on a la densité de courant $\vec{i} = \text{grad } \varphi$; la conservation de la charge s'exprime par $0 = \text{div } \vec{i} = \Delta\varphi$. On voit donc que *le potentiel φ est la solution du problème de Dirichlet du § 1. 1.*

Comme $\rho = 1$ et $V = 1$, la chaleur de Joule dégagée par seconde est

$$J = \iint_G \vec{i}^2 dx dy = D(\varphi) = \oint_{\Gamma_1} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \oint_{\Gamma_1} \vec{i} \cdot \vec{n} ds = I,$$

où I désigne l'intensité totale et \vec{n} la normale extérieure.

La résistance totale est

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{I}.$$

3. UNE INTERPRÉTATION DU PRINCIPE DE DIRICHLET.

3.1. Modifions le problème physique du § 2 en introduisant dans le domaine G des conducteurs parfaits $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$ (fig. 2). J'écrirai $\gamma_0 = \Gamma_0, \gamma_n = \Gamma_1$. Cette modification provoque évidemment une augmentation de l'intensité. *Quand l'intensité est-elle inchangée?* Lorsque aucun courant ne parcourt les conducteurs γ_i , c'est-à-dire si toutes les courbes γ_i sont des lignes de niveau de φ (§ 2).

Appelons $u(x, y)$ le potentiel pour le problème modifié, \bar{I} l'intensité et \bar{J} la chaleur de Joule dégagée par seconde. On a $u = \text{const} = u_i$ sur la courbe γ_i ; dans chaque bande G_i (entre γ_{i-1} et γ_i), $u(x, y)$ s'obtient à partir de u_{i-1} et u_i en résolvant un problème de Dirichlet ($i = 1, 2, \dots, n$); les inconnues u_1, \dots, u_{n-1} sont déterminées par les $n - 1$ conditions de conservation de la charge:

Flux à travers $G_i = \text{Flux à travers } G_{i+1}$
($i = 1, 2, \dots, n - 1$).

On a encore $\bar{J} = V \cdot \bar{I} = \bar{I}$, donc

$$D(\varphi) = J = I \leq \bar{I} = \bar{J} = D(u).$$

Notre plaque se comporte à présent comme un système de n résistances $R_i = R_{\gamma_{i-1} \gamma_i}$ connectées en série (fig. 3):

$$\frac{1}{\bar{I}} = \bar{R} = R_1 + R_2 + \dots + R_n.$$

3.2. Modifions de nouveau le problème physique: Au lieu de laisser des potentiels « naturels » u_i s'établir librement sur les

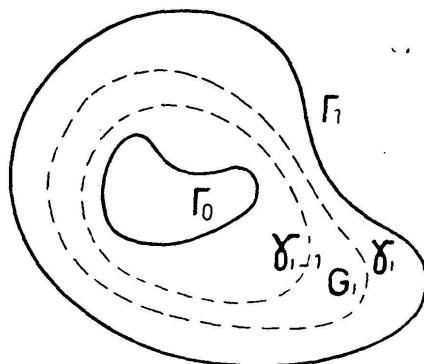


Fig. 2

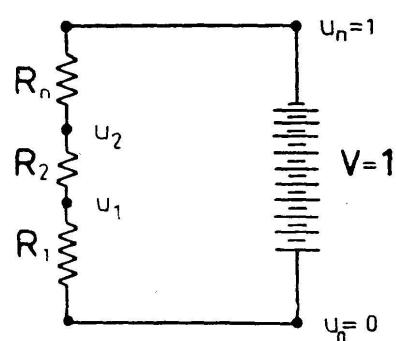


Fig. 3

conducteurs γ_i , nous imposons des potentiels arbitraires v_i . En d'autres termes, nous connectons à la batterie toutes les extrémités des résistances partielles R_i (fig. 4).

Appelons $\varphi(x, y)$ la solution du nouveau problème physique (obtenue par résolution, dans chaque bande G_i , d'un problème de Dirichlet), et \bar{J} la chaleur de Joule maintenant dégagée par seconde.

Il est intuitif que $\bar{J} \geq \bar{J}$; quand a-t-on l'égalité? Lorsque aucun courant ne parcourt les conducteurs ajoutés $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$, c'est-à-dire si les potentiels intermédiaires imposés v_i sont égaux aux potentiels « naturels » u_i . La démonstration est simple et repose sur l'inégalité de Schwarz: posons

$$v_i - v_{i-1} = V_i; \quad \sum_1^n V_i = 1;$$

$$\bar{J} = D(\varphi) = \sum_{i=1}^n \frac{V_i^2}{R_i} \geq \frac{(\sum V_i)^2}{\sum R_i} = \frac{1}{\bar{R}} = D(u) = \bar{I} = \bar{J};$$

on a l'égalité si $\frac{V_i}{R_i} = \text{const}$, c'est-à-dire si l'intensité est la même dans chaque G_i : c'est précisément la condition qui, au § 3.1, déterminait les u_i . On a donc

$$D(\varphi) \geq D(u) \geq D(\phi).$$

3.3. Le *principe de Dirichlet* exprime précisément l'inégalité $D(\varphi) \geq D(\phi)$ dans le cas limite où l'on a imposé toutes les lignes de niveau de φ et leur potentiel, c'est-à-dire lorsqu'on a imposé la fonction φ elle-même¹⁾. On n'a l'égalité que si $\varphi = \phi$.

1) A l'aide de toutes les lignes de niveau d'une fonction admissible v , on peut construire une borne supérieure $D(u)$ pour $D(\varphi)$, meilleure que $D(v)$: cf. G. PÓLYA et G. SZEGÖ: *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics* (Princeton University Press, 1951), p. 47.

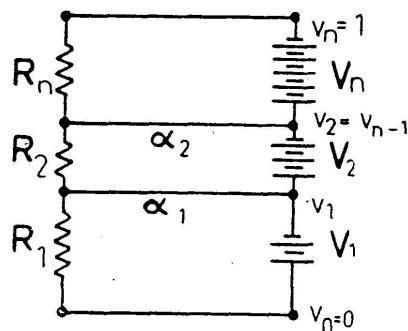


Fig. 4

4. UNE INTERPRÉTATION DU PRINCIPE DE THOMSON.

4. 1. Modifions *d'une autre façon* le problème physique initial (§ 2): *Découpons en lanières* G_j *la plaque homogène* (fig. 5).

Ce découpage provoque évidemment une diminution de l'intensité. *Quand l'intensité est-elle inchangée?* Lorsque, initialement, aucun courant $\vec{i} = \text{grad } \varphi$ ne traversait les coupures, c'est-à-dire *si toutes les coupures sont des lignes de flux de* $\text{grad } \varphi$ (§ 2).

Appelons $\varpi(x, y)$ le potentiel pour le problème modifié, \tilde{I} l'intensité totale et \tilde{J} la chaleur de Joule dégagée par seconde. On a $\varpi = 0$ sur Γ_0 , $\varpi = 1$ sur Γ_1 , $\frac{\partial \varpi}{\partial n} = 0$ sur les coupures, $\Delta \varpi = 0$ dans chaque G_j .

On a encore $\tilde{J} = \mathbf{V} \cdot \tilde{\mathbf{I}} = \tilde{I}$, donc $D(\varphi) = J = I \geq \tilde{I} = \tilde{J} = D(\varpi)$.

Notre plaque se comporte à présent comme un *système de résistances* R_1, R_2, \dots, R_m *connectées en parallèle*:

$$\tilde{I} = \sum_{j=1}^m \tilde{I}_j = \sum_{j=1}^m \frac{1}{R_j} \quad (\text{car } \mathbf{V} = 1).$$

Appelons ϖ_j la restriction de ϖ à G_j ;

$$\tilde{J}_j = D(\varpi_j) = \int_{\Gamma_{1j}} \frac{\partial \varpi_j}{\partial n} ds = \tilde{I}_j,$$

où Γ_{1j} est la partie de Γ_1 qui borde G_j .

4. 2. Considérons le cas limite où les lanières G_j sont de largeur infinitésimale. Le découpage de G est alors équivalent à un *choix des lignes de flux* d'un champ vectoriel. Soit \vec{p} un tel champ, *de divergence nulle*; la direction de \vec{p} est déterminée en

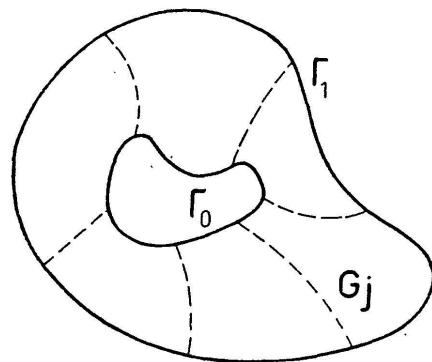


Fig. 5

tout point; sa grandeur $p = p(s)$ est fonction de l'arc sur la ligne de flux. L'équation $\operatorname{div} \vec{p} = 0$ est donc équivalente à une équation différentielle *ordinaire*, linéaire et *homogène*, pour $p(s)$; une solution est $\operatorname{grad} \varpi$ (c'est-à-dire: $\operatorname{grad} \varpi_j$ dans la bande infinitésimale G_j); donc, dans G_j , $\vec{p} = t_j \operatorname{grad} \varpi_j$ (t_j est constante dans G_j). Il s'ensuit, par l'inégalité de Schwarz, que

$$\frac{\left(\oint_{\Gamma_1} \vec{p} \cdot \vec{n} \, ds \right)^2}{\iint_G \vec{p}^2 \, dx \, dy} = \frac{\left[\sum_j t_j D(\varpi_j) \right]^2}{\sum_j t_j^2 D(\varpi_j)} \leq \sum_j D(\varpi_j) = D(\varphi) = I \leq I = J = D(\varphi),$$

nous avons donc bien une interprétation du principe de Thomson.

5. UN PASSAGE THOMSON → DIRICHLET,
à l'aide des lignes de niveau $\bar{\gamma}$ d'une fonction φ
concurrente pour Dirichlet.

Dans le principe de Thomson ci-dessus, normons \vec{p} en imposant $\oint_{\gamma} \vec{p} \cdot \vec{n} \, ds = 1$ pour toute courbe fermée γ séparant Γ_0 de Γ_1 ; pour ces champs concurrents \vec{p} , on a

$$D(\varphi) = \operatorname{Max}_{\vec{p}} \left(\iint_G \vec{p}^2 \, dx \, dy \right)^{-1}.$$

Admettons maintenant davantage de champs concurrents: imposons la condition $\oint_{\bar{\gamma}} \vec{p} \cdot \vec{n} \, ds = 1$ pour les seules lignes de niveau $\bar{\gamma}$ de φ ; le maximum devient plus grand, et nous avons

$$D(\varphi) \leq \operatorname{Max}_{\vec{p}} \left(\iint_G \vec{p}^2 \, dx \, dy \right)^{-1};$$

on peut montrer que le maximum à droite est maintenant égal à $D(u)$ (cf. § 3.1), donc $D(\varphi) \leq D(u) \leq D(\varphi)$, et nous retrouvons bien le principe de Dirichlet.

6. UN PASSAGE DIRICHLET → THOMSON,
 à l'aide des lignes de flux d'un champ vectoriel \vec{p}
 concurrent pour Thomson.

Partageons le domaine G en lanières G_j par des lignes de flux κ de \vec{p} , comme au § 4.1; dans le principe de Dirichlet (§ 1.1)

$$D(\varphi) = \text{Min}_v D(v), v \text{ continue dans } G, \text{ lisse par morceaux} = \begin{cases} 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ 1 \text{ sur } \Gamma_1, \end{cases}$$

admettons maintenant à concurrence également les fonctions \tilde{v} discontinues le long des coupures κ ; c'est-à-dire que nous exigeons seulement la continuité dans chaque lanière G_j : le minimum diminue évidemment et l'on a

$$D(\varphi) \geq \text{Min}_{\tilde{v}} D(\tilde{v}).$$

Soit \tilde{v}_j la restriction de \tilde{v} à G_j , et soit de nouveau ω_j la solution du problème mixte dans G_j : $\omega_j = 0$ sur Γ_{0j} , $\omega_j = 1$ sur Γ_{1j} , $\frac{\partial \omega_j}{\partial n} = 0$ sur les coupures κ .

$$\text{Min}_{\tilde{v}} D(\tilde{v}) = \sum_j \text{Min}_{\tilde{v}_j} D(\tilde{v}_j) = \sum_j D(\omega_j) = \oint_{\Gamma_1} \frac{\partial \omega}{\partial n} ds = D(\omega),$$

comme au § 4.1; pour des lanières G_j de largeur infinitésimale, on retrouve, comme au § 4.2, le principe de Thomson:

$$\frac{\left(\oint_{\Gamma_1} \vec{p} \cdot \vec{n} ds \right)^2}{\iint_G \vec{p}^2 dx dy} \leq D(\omega),$$

donc $\leq D(\varphi)$ en vertu de ce qui précède.

7. UN PAS VERS UN PRINCIPE DE THOMSON
 POUR LA MEMBRANE VIBRANTE.

7.1. Cherchons à réaliser, pour le problème de la membrane vibrante (§ 1.2), un passage analogue à celui du § 6; à

présent: « *de Rayleigh à Thomson* ». Pour cela, partageons le domaine G du § 1.2 en sous-domaines G_j (fig. 6).

Dans le principe de Rayleigh

$\lambda_1 = \text{Min}_v R[v]$, v continue dans G ,
lisse par morceaux, $= 0$ sur Γ ,

nous voulons maintenant admettre également à concurrence les fonctions \tilde{v} discontinues le long des coupures. Le minimum ne peut évidemment que décroître:

$$\lambda_1 \geq \text{Min}_{\tilde{v}} R[\tilde{v}] ;$$

appelons \tilde{v}_j la restriction de \tilde{v} à G_j .

Soient, dans G_j , ξ_j la première valeur propre et ω_j la fonction propre correspondante, d'une membrane G_j liée le long de Γ_j , libre sur les « coupures »; on a $\Delta \omega_j + \xi_j \omega_j = 0$ et $\omega_j > 0$ dans G_j , $\omega_j = 0$ sur Γ_j , $\frac{\partial \omega_j}{\partial n} = 0$ sur les coupures; $\xi_j = \text{Min}_{\tilde{v}_j} R[\tilde{v}_j]$.
Donc

$$\lambda_1 \geq \text{Min}_{\tilde{v}} R[\tilde{v}] = \text{Min}_{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_m} \frac{\sum_j D(\tilde{v}_j)}{\sum_j \iint_{G_j} \tilde{v}_j^2 dx dy} = \min_j \xi_j .$$

Si toutes les coupures sont des lignes de flux de $\text{grad } \varphi$ (φ étant la fonction propre fondamentale, cf. § 1.2), ω_j est simplement la restriction de φ à G_j et l'on a, pour tout j ,

$$\xi_j = R[\omega_j] = \lambda_1$$

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant:

$$\lambda_1 = \text{Max}_{\text{découpages de } G \text{ en lanières } G_j} \min_j \xi_j . \quad 1)$$

1) à Voir ce sujet: *C.R. Acad. Sci. Paris*, 248, 1959, p. 2060, où deux applications numériques sont indiquées.

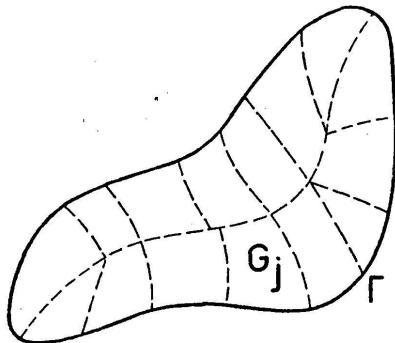


Fig. 6

7. 2. Dans le cas limite de bandes G_j de largeur infinitésimale, on a, dans chaque G_j , un problème à une seule variable indépendante, car $\omega_j = \omega_j(s)$.

Le parallélisme entre ce § 7 et le précédent permet d'interpréter ce résultat comme un pas en direction d'un « principe de Thomson » pour la membrane vibrante. La difficulté reste évidemment le calcul (ou l'évaluation par défaut) de tous les ξ_j . Peut-on aller au-delà de cette formulation ? La question reste ouverte.