Réunion de Lausanne, 12 septembre 1959

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1959)**

Heft 3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE SUISSE

Conférences et communications

Séance de printemps du 21 juin 1959 à Berne.

1. *Séance administrative.*

Rapport préliminaire de M. le professeur H. JECKLIN sur le cinquantième anniversaire de la Société mathématique suisse, qui sera fêté en juin 1960 à Zurich.

2. *Partie scientifique.*

Conférence de M. le professeur Martin EICHLER, Université de Bâle:

Über eine körperinvariante Theorie der Divisoren in algebraischen Funktionenkörpern von mehreren Variablen.

Réunion de Lausanne, 12 septembre 1959

La Société mathématique suisse a tenu sa 48e assemblée annuelle à Lausanne le 12 septembre 1959, en même temps que la 139e session de la Société helvétique des Sciences naturelles, sous la présidence de M. le professeur H. JECKLIN, vice-président de la Société.

Séance administrative

L'ordre du jour statutaire a été liquidé. Le Comité pour la période 1960-1961 est élu comme suit: Président: Prof. H. JECKLIN, Zurich, vice-président: Prof. B. ECKMANN, Zurich, secrétaire-caissier: Prof. J. DE SIEBENTHAL, Lausanne. La Société fêtera en 1960 son 50e anniversaire. Prof. JECKLIN donne des informations préliminaires sur ce jubilé: un colloque international de topologie et de géométrie différentielle sera organisé sous les auspices et avec l'appui de l'Union mathématique internationale, du 20-26 juin 1960; les deux dernières journées sont réservées à des conférences générales et aux séances du jubilé.

Partie scientifique : Résumé des communications

1. R. C. H. TANNER, Londres: *La place de l'inégalité dans l'histoire des mathématiques.*

Les signes d'inégalité ($<$ et $>$) datent du *Artis analyticae praxis* de Thomas Harriot, publié, dix ans après sa mort, par Walter Warner en 1631. Ils nous sont indispensables aujourd'hui, malgré la tendance à les bannir. Maintes égalités modernes sont du reste des inégalités masquées, bonnes pour la formulation définitive, plus élégante, redevenant inégalités (souvent plus précises) dans les définitions, les raisonnements, les applications. Essayer de s'en priver, ou de reléguer la théorie des inégalités en dehors de l'enseignement mathématique propre, conduit à en réévaluer le rôle historique. L'analyse classique a pour noyau la notion de limite définie par toute une agglomération d'inégalités. Le calcul infinitésimal, même à ses débuts, n'a pu se passer d'inégalités. Les approximations célèbres, au nombre π par exemple, la méthode d'exhaustion d'Archimède, nous reportent encore de quelques milliers d'années en arrière. Même une égalité précise, à moins d'être tautologique par son mode de dérivation, fut souvent, en premier lieu, la négation des deux inégalités complémentaires, et son intérêt principal est d'être limitrophe entre celles-ci. Cette remarque vaut pour l'antiquité comme pour le présent.

Dans l'*Histoire de la notation mathématique*, l'inégalité date de Thomas Harriot, protégé du duc de Northumberland à la suite de l'énorme succès, en 1588, de sa première et unique publication, *A brief and true report of the Newfoundland of Virginia*, étude scientifique sur la fameuse expédition organisée par Walter Raleigh. Ses signes modifient de façon géniale l'invention de Robert RECORDE, en 1557, en faisant diverger dans le sens de la quantité plus grande les deux lignes parallèles du signe d'égalité $=$: Ce principe tacite ne sauta pas aux yeux de ses contemporains, en dépit de la très grande estime qu'ils accordèrent au traité dans son ensemble. Leibniz lui-même préféra expérimenter tout d'abord avec d'autres signes. Newton n'en utilisa, à ce qu'il paraît, aucun. Harriot n'était pas, comme lui, un génie mathématique, à l'aise dans l'abstraction. C'est peut-être pourquoi il a si bien choisi ces signes, comme aide purement personnelle à la clarification de sa pensée. Son ouvrage n'a vu le jour que parce que Walter Warner se fit accorder la rente de Harriot défunt, par le duc de Northumberland, sous condition de publier ses travaux.

L'évaluation complète de l'inégalité dans l'*Histoire des notions mathématiques* reste à faire. Le préambule usuel « les mathématiques commencent par la numérotation » ne s'applique qu'à la *notation.* Le nombre représente un stage déjà avancé de la pensée mathéma-

tique, qui débute au contraire par la comparaison, la constatation de différences plutôt que d'identités. Les mots « encore », « plus », prononcés par une mère , la cuillère à la main, posent déjà pour l'enfant la base de l'acte de compter.

2. A. AMMAN, Genève: *La théorie des formes différentielles et les équations de Maxwell.*

Les équations de l'Electrodynamique de Maxwell peuvent s'exprimer d'une manière concise par l'usage de la notation des formes différentielles. Au tenseur électromagnétique et son adjoint, qui contiennent les composantes du champ électrique et de l'induction magnétique, et respectivement du champ magnétique et du déplacement électrique sont associées des formes de degré deux, Ω, Ω^* dans l'espace pseudo-euclidien réel à quatre dimensions de la relativité restreinte, qui interviennent dans l'expression développée de la force de Lorentz, représentée par une forme de degré un, dont la quatrième composante est l'impulsion du champ électrique sur le courant observé, appelée aussi puissance de convection.

Au tenseur d'impulsion-énergie (ou tenseur des tensions de Maxwell) est associée une forme double de différentielles linéaires, qui contient dans ses composantes la densité d'énergie électromagnétique, figurant aussi, avec l'impulsion électrique et l'impulsion électromagnétique dans la formule de Poynting.

L'usage de ce formalisme permet des simplifications appréciables dans l'écriture des relations fondamentales, grâce à l'introduction des opérateurs différentiels qui représentent la différentiation extérieure d'une forme et son adjoint δ.

Dans l'absence d'un courant de convection observable des charges électriques, l'équation de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide devient ainsi $\Delta\Omega = 0$, $\Delta = d\delta + \delta d$ désignant l'opérateur de Laplace généralisé, alors qu'elle s'écrit dans le cas général $d\Omega = 0$, $\delta\Omega = \mathrm{I}$, où I est une forme différentielle linéaire contenant les composantes du courant et la densité de distribution des charges. L'équation de conservation $\delta\mathrm{I} = 0$ se déduit alors de l'identité $\delta^2 = 0$, tandis que l'équation de propagation des ondes proprement dite est $\Delta\Omega = d\mathrm{I}$.

Cette notation a aussi l'avantage de se prêter naturellement à la forme variationnelle que l'on donne quelquefois aux équations de Maxwell en généralisant le principe d'Hamilton de la mécanique classique par l'introduction d'une fonction de Lagrange.

3. S. PICCARD, Neuchâtel: *Contribution à la théorie générale des groupes.*

On sait l'importance des groupes libres dans la théorie générale des groupes. On sait aussi que le groupe engendré par n'importe quel

système d'éléments générateurs liés par n'importe quel ensemble de relations définissantes est isomorphe à un groupe-quotient d'un certain groupe libre. En général, on aborde la théorie des groupes libres par la formation de « mots », ce qui est long et fastidieux. Il est plus commode d'introduire d'emblée dans cette étude le langage des groupes multiplicatifs.

Soit G un groupe *multiplicatif* libre engendré par un ensemble (fini ou infini) A d'éléments *libres*, c'est-à-dire d'éléments qui ne sont liés que par des relations triviales résultant des axiomes de groupe. Tout élément c de G peut être mis de *façon unique* sous la forme d'une composition finie *réduite* d'éléments de A. Cette composition est de la forme suivante: $c = a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_r^{i_r}$, où $a_i \in A$, $i = 1, 2, \dots, r$, $r \geqq 1$, $a_l \neq a_{l+1}$, $l = 1, 2, \dots, r-1$ et $i_1, i_2, \dots, i_r$ sont des entiers dont aucun n'est nul, si $r > 1$. c possède donc un degré fixe par rapport à tout élément a de A, ce degré étant la somme des exposants de a dans la composition finie réduite d'éléments de A qui représente c. Il ressort sans peine de la loi de composition des éléments d'un groupe libre que si c et d sont deux éléments quelconques de G, quel que soit l'élément a de A, le degré du produit cd par rapport à a est égal à la somme des degrés de c et de d par rapport à a. On peut aborder la structure des groupes libres en partant de ces simples remarques. On peut, notamment, décomposer, et cela d'une infinité de façons, l'ensemble des éléments de G en classes d'équivalence, disjointes deux à deux, comme suit. Supposons, pour fixer les idées, que G est de rang fini, autrement dit qu'il est engendré par un ensemble fini $A = \{ a_2, a_2, \dots, a_k \}$ d'éléments libres. Soit n un entier $\geqq 2$ quelconque et soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ des entiers faisant partie de la suite $0, 1, \dots, n-1$. Nous dirons qu'un élément c de G fait partie de la classe $M^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k}$ si c est de degré congru à λ_l modulo n par rapport à a_l, quel que soit $l = 1, 2, \dots, k$. Quels que soient les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ de la suite $0, 1, \dots, n-1$, la classe $M^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k}$ contient une infinité d'éléments de G. Elle contient, avec tout élément c de G, la classe entière des éléments de G conjugués à c. Appelons *produit* de deux classes $M^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k}$ et $M^{(n)}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}$ l'ensemble des éléments de G de la forme cd, $c \in M^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k}$, $d \in M^{(n)}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}$. On a $M^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k} M^{(n)}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} = M^{(n)}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_k}$, où $\nu_l = \lambda_l + \mu_l \pmod{n}$, $l = 1, 2, \dots, k$. Avec cette loi de composition, les classes $M^{(n)}$ forment un groupe abélien $\Gamma^{(n)}$ *associé* au groupe libre G. L'élément neutre de ce groupe est la *classe nulle* $M^{(n)}_{00 \dots 0}$. Quels que soient les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ de la suite $0, 1, \dots, n-1$, la classe $M^{(n)}_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k}$ envisagée comme un élément du groupe $\Gamma^{(n)}$ est d'ordre n/d, où d est le p.g.c.d. des nombres $n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Le nombre minimum d'éléments générateurs du groupe $\Gamma^{(n)}$ est égal à k.

Si un groupe G (pas nécessairement libre) possède un système fini $A = \{ a_1, a_2, ..., a_k \}$ d'éléments générateurs, tel que tout élément du groupe G possède un degré fixe par rapport à chacun des éléments a_l ($l = 1, 2, ..., k$), le nombre k d'éléments qui constituent le système générateur A est minimum et tout élément de G possède un degré fixe par rapport à chaque élément de tout autre système générateur de G, formé lui aussi de k éléments.

Quels que soient les deux systèmes générateurs minima $A = \{ a_1, a_2, ..., a_k \}$ et $B = \{ b_1, b_2, ..., b_k \}$ du groupe libre G, on a $b_i = f_i (a_1, a_2, ..., a_k)$, $i = 1, 2, ..., k$, où f_i est une composition finie réduite des éléments $a_1, a_2, ..., a_k$, de degré fixe w_j^i par rapport à a_j ($j = 1, 2, ..., k$) et le déterminant $| w_j^i |$ est toujours égal à $+1$ ou à -1.

Quel que soit le sous-groupe γ du groupe abélien $\Gamma^{(n)}$ associé au groupe libre G, la réunion des éléments de G contenus dans les classes $M^{(n)}$ qui sont des éléments de γ est un sous-groupe invariaut de G. En particulier, la classe nulle $M_{00\ldots0}^{(n)}$ est un sous-groupe invariant de G, quel que soit $n = 2, 3, ...$

Les classes $M^{(n)}$ qui constituent les éléments du groupe $\Gamma^{(n)}$ ont un caractère intrinsèque, indépendant du système d'éléments générateurs A, à partir duquel elles ont été définies.

Quel que soit le sous-groupe g de G et quel que soit l'entier (fixe) $n \geqslant 2$, les classes $M^{(n)}$ qui contiennent des éléments de g ont en commun avec g des ensembles d'égale puissance. D'autre part, l'ensemble γ des classes $M^{(n)}$ qui contiennent des éléments de g est un sous-groupe du groupe $\Gamma^{(n)}$.

De nombreuses autres propriétés de structure des groupes libres peuvent être établies de cette façon.

On peut traiter de façon analogue les groupes libres ayant un système de puissance quelconque d'éléments générateurs libres.

Les méthodes exposées se prêtent non seulement à l'étude des groupes libres, mais aussi à celle de certains groupes non libres. Soit G un groupe engendré par un système *irréductible* d'éléments A, c'est-à-dire un système d'éléments générateurs tel que, quel que soit le sous-ensemble fini A* de A, il n'existe aucun ensemble B d'éléments de G, de puissance inférieure à celle de A* et tel que tout élément de A* puisse être obtenu par composition finie d'éléments de B. Supposons que les éléments de A sont liés par un ensemble de relations caractéristiques de la forme $f (a_1, a_2, ..., a_k) = 1$, où f est une composition finie des éléments $a_1, a_2, ..., a_k$ de A qui est de degré nul par rapport à tout élément de A. Nous appelons *principal* tout élément de G qui fait partie d'un système irréductible d'éléments générateurs liés par des relations caractéristiques de cette nature. Tout élément c d'un tel groupe G possède un degré fixe par rapport à tout élément de A et le degré du produit cd de deux éléments c et d

de G par rapport à un élément a de A est égal à la somme des degrés de c et de d par rapport à a. Tout élément principal de G est d'ordre infini et, quel que soit l'entier $n \geqslant 2$, on peut décomposer les éléments de G en classes $M^{(n)}$ comme nous l'avons fait pour les groupes libres, classes ayant un caractère intrinsèque et qui permettent de scruter la structure du groupe G.

Remarquons qu'il existe effectivement des groupes liés de cette façon, il en existe même une infinité. Soit, par exemple, A un ensemble (fini ou infini) d'éléments dont chacun est un cycle infini, supposons que tous ces cycles ont en commun un élément et un seul a_0, deux cycles quelconques de A n'ayant en commun que cet élément a_0. Les éléments de A satisfont de nombreuses relations non triviales. On a, par exemple, quels que soient les éléments a et b de A: $(ab^i\, a^{-1}\, b^{-i})^3 = 1$, $i = 1, 2, \ldots$ Mais toute relation liant les éléments de A est de degré nul par rapport à tout élément de A et par conséquent le groupe engendré par les éléments de A, avec la loi multiplicative de composition des transformations, peut être étudié par les méthodes exposées ci-dessus.

4. P. COMMENT, Lausanne: *Remarque sur l'inversion intégrale de certaines fonctions régulières.*

Considérons, dans le groupe E des unités (éléments réguliers) de l'anneau I des fonctions arithmétiques [4], les produits intégraux

$$S_k(f, g) = (f\, \delta_k) \times g\,, \qquad [2]\,,\ [1.211]$$

dépendant du paramètre naturel k, δ_k étant la (fonction) caractéristique de l'ensemble des diviseurs (forts) de k.

Si f est totalement multiplicative, alors

$$S_k^{x-1}(f, g) = (f\, \gamma_k) \times S_k\left(f^{x-1}, g^{x-1}\right)$$

où γ_k désigne la caractéristique de l'ensemble des diviseurs distingués de k [3. § 4].

Cette proposition fera l'objet d'une Note ultérieure dans le cadre des applications de la divisibilité faible à la théorie du produit intégral.

[1] ANDERSON, D. R. and T. M. APOSTOL, 1953, The evaluation of Ramanujan's sum and generalizations. *Duke math. Jour.*, 20, pp. 211-216.

[2] CIPOLLA, M., 1928/29, Sulle funzioni numeriche del massimo divisore e del minimo multiplo comune a due numeri. *Atti della R. Accad. di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo*, vol. XV.

[3] COMMENT, P., 1959, Divisibilité faible. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, s. II, t. VIII, fasc. 2.

[4] PELLEGRINO, F., 1956, Lineamenti di una teoria delle funzioni aritmetiche, I. *Rend. di Mat. e delle sue appl.*, s. V, vol. XV, fasc. 3/4, Roma, p. 478, § 4; 496, § 12.

5. J. HERSCH, Genève: *Une symétrisation différente de celle de Steiner.*

1. Soit G un domaine plan d'aire A et de périmètre L; coupons-le, par une droite γ, en deux domaines d'égale aire $\frac{A}{2}$; ajoutons à chacun d'entre eux son symétrique par rapport à γ; nous obtenons deux domaines G_a, G_b symétriques par rapport à γ, de périmètres L_a et L_b et de même aire A; $L = \frac{1}{2}(L_a + L_b)$. Donc: l'un des deux domaines G_a, G_b a un périmètre inférieur ou égal à L. On voit ainsi très élémentairement: s'il y a une *seule* solution du problème isopérimétrique classique, ce ne peut être que le cercle ($G_a = G_b = G$).

2. *Capacité électrostatique* C. — Soit E un ensemble borné dans l'espace à trois dimensions; considérons les fonctions $p\,(x, y, z)$ continues et lisses par morceaux, valant 1 sur E et zéro à l'infini; la capacité (extérieure) de E est donnée par $4\pi C(E) = \mathrm{Inf}_p\, D(p)$ (intégrale de Dirichlet). Comme au paragraphe précédent, symétrisons E par rapport à un plan γ: nous obtenons E_a et E_b; symétrisons en même temps $p\,(x, y, z)$, nous obtenons des fonctions p_a, p_b concurrentes pour $C(E_a)$ et $C(E_b)$, donc

$$D(p) = \frac{1}{2}[D(p_a) + D(p_b)] \geqslant \frac{1}{2}[4\pi C(E_a) + 4\pi C(E_b)]$$

d'où

$$C(E) \geqslant \frac{1}{2}[C(E_a) + C(E_b)]\,. \qquad (1)$$

Dans bien des cas, cette inégalité se confond avec la première inégalité de G. CHOQUET $C(Q \cup R) + C(Q \cap R) \leqslant C(Q) + C(R)$.

3. *Rigidité à la torsion* P, *fréquence propre fondamentale* λ_1 *d'une membrane.* — Reprenons les domaines plans G, G_a, G_b du § 1 ci-dessus, mais *sans* imposer nécessairement que la droite γ partage l'aire de G en deux parties égales. Un raisonnement analogue donne:

$$P(G) \leqslant \frac{1}{2}[P(G_a) + P(G_b)]\,, \quad ^{1)} \qquad (2)$$

$$\lambda_1(G) \geqslant \min[\lambda_1(G_a)\,,\ \lambda_1(G_b)]\,. \quad ^{1)} \qquad (3)$$

---

1) J. HERSCH: *Comptes rendus*, t. 248, 1959, p. 2060.

Dans de nombreux cas, l'inégalité (2) se confond avec celle de M. AISSEN $P(Q \cup R) + P(Q \cap R) \geqslant P(Q) + P(R)$.

Les inégalités (1), (2), (3) sont liées aux propriétés isopérimétriques du cercle et de la sphère [1]; elles fournissent de bonnes évaluations de C, P et λ_1.

Post scriptum. — J'apprends que G. PÓLYA a récemment appliqué cette symétrisation aux problèmes considérés ici et l'a appelée « symétrisation alternée ».

6. *Conférence* de M. Ch. BLANC, professeur à l'Université de Lausanne, sur le sujet: *Quelques tendances actuelles en analyse numérique.*

Elle paraîtra *in extenso* dans un prochain fascicule de la revue.

1) G. PÓLYA et G. SZEGÖ: *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics* (Princeton University Press, 1951).