

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 5 (1959)
Heft: 3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DIE WISSENSCHAFTLICHEN GRUNDLAGEN DER SCHULMATHEMATIK
Autor: Behnke, Heinrich
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-35488>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

DIE WISSENSCHAFTLICHEN GRUNDLAGEN DER SCHULMATHEMATIK

Eine Einleitung zu den Berichten Edinburgh, August 1958

von Heinrich BEHNKE, Münster

(*Reçu le 5 août 1959.*)

Für die geistige Situation unserer Zeit ist es charakteristisch, dass der Umfang aller menschlichen Erkenntnis ungemein schnell anwächst. Das betrifft insbesondere die Naturwissenschaften. Viele dieser neuen Erkenntnisse werden zum Verständnis des täglichen Lebens benötigt oder sind erforderlich, um die grossen Veränderungen in unserer Welt zu begreifen. Da ist es natürlich, dass immer neue Anforderungen an die Ausweitung des Lehrstoffes in den Schulen gestellt werden. Da aber im allgemeinen die Schulen ihre Lehrstunden voll ausnutzen, so muss ein Teil des bisherigen Lehrstoffes aufgegeben werden. Das ist auf Fachschulen durch erhöhte Spezialisierung möglich, aber sehr viel schwerer auf allgemeinbildenden Schulen durchzuführen. So macht sich der entstehende Druck auf Erweiterung der Lehrpläne vor allem in den Ländern bemerkbar, deren Erziehungssystem folgende Merkmale aufweist:

1. Es gibt besondere allgemeinbildende Schulen für Begabte (im allgemeinen Gymnasien oder Lyceen genannt) zur Vorbereitung eines Universitätsstudiums;
2. Der Schüler soll in der Schulzeit (bis zum 19. oder 20. Lebensjahr) sich noch nicht für den späteren Beruf vorbilden, sondern ausschliesslich einem studium generale nachgehen. Nur der Nachweis der so erlangten allgemeinen Bildung berechtigt zum Besuch einer Universität;
3. Die Kurse auf der Universität tragen ausschliesslich wissenschaftlichen Charakter und sind nicht mehr vorbereitender Art. Sie werden durch Dozenten erteilt, die sich zuerst als Forscher und — je nach der Eigenart des Einzelnen — dann vielleicht nebenbei noch als Lehrer fühlen.

Dies sind Merkmale des traditionellen europäischen Schulsystems. Ein solches Schulsystem funktionierte noch sehr gut um die Jahrhundertwende. Die Gymnasien (secondary schools) trieben Humaniora und Mathematik für eine kleine Elite besonders begabter Studenten. Aber in den letzten 50 Jahren hat sich vieles geändert. So musste in relativ beträchtlichem Umfang Platz für den Unterricht in den Naturwissenschaften geschaffen werden. Dafür mussten die Stundenzahlen in anderen Fächern gekürzt werden. Bei der Frage, in welchen Fächern die Kürzung vorzunehmen sei, wurde nun von den Vertretern der Geisteswissenschaft sehr häufig verlangt, dass das „Gleichgewicht“ zwischen den Geisteswissenschaften auf der einen Seite und der Mathematik und den Naturwissenschaften auf der anderen Seite im Interesse der Allgemeinbildung nicht gestört würde. So kam es dazu, dass die Zahl der mathematischen Unterrichtsstunden in den letzten Jahrzehnten vielfach erheblich gekürzt wurde. Die Durchschnittsbegabung der Schüler nahm inzwischen gleichzeitig ab, weil die Gymnasien für viel grössere Schülerkreise geöffnet wurden. So steht in den Gymnasien vieler Länder der Mathematikunterricht unter einem harten Druck. Dauernd musste der Stoff auf mögliche Kürzungen neu gesichtet werden. Grosse Teile der Elementargeometrie wurden aufgegeben, ebenso einiges aus der Lehre von der Auflösung von Gleichungen, wie die kubischen Gleichungen. Vielfach wurde sogar — was ich sehr bedauere — die sphärische Trigonometrie gestrichen. Aber aus gewichtigen Gründen mussten andererseits andere Gebiete neu in den Schulunterricht einbezogen werden: So, mit Rücksicht auf die Anwendungen, zu Beginn dieses Jahrhunderts die Infinitesimalrechnung und später die Vektorrechnung. Das Erlanger Programm hat auch vereinzelt in Schulen Einlass gefunden, wie die dort benutzten Unterrichtswerke beweisen [1].

Die Einführung der Infinitesimalrechnung im Schulunterricht ging durchaus nicht mühelos vor sich. Vielmehr entbrannte darum vielerorts ein harter Streit. Es gab manche grundsätzliche Diskussion über den Sinn des mathematischen Unterrichts. Das führte mittelbar zur Gründung der IMUK im Jahre 1908. Diese hatte ihre grosse Zeit in den wenigen Jahren bis zum 1. Weltkrieg, wie zahlreiche Schriften beweisen.

Heute, 50 Jahre später, wo die Betrachtungsweisen in der Geometrie und Algebra sich so sehr geändert haben, sind die Fragen des mathematischen Unterrichts an den Gymnasien wieder sehr akut geworden. In der Geometrie ist es vor allem die systematische Einführung der Geometrie als Bewegungsgeometrie (wie Felix Klein es schon forderte), die für den Unterricht in den Gymnasien in breiter Front jetzt ernst diskutiert und mehr und mehr eingeführt wird. In der Algebra spürt man bei den Erörterungen über neue Wege im Schulunterricht schon den Einfluss von Bourbaki.

Vor kurzem bin ich gefragt worden, ob die IMUK nicht für die Gymnasien ein Lehrbuch — oder genauer: eine aufeinander folgende Reihe von Lehrbüchern, was man in Deutschland ein Unterrichtswerk nennt — herausgeben könnte, das in der ganzen Welt zu gebrauchen sei. Ein solches Buch — wenn erst einmal geschrieben — würde wahrlich die Krönung der IMUK-Arbeit darstellen können.

So haben wir häufig diese Anregung diskutiert. Doch kamen wir immer wieder zu dem Schluss, dass ein solcher Plan nicht realisierbar ist. Die Anforderungen, die man an einen Schüler stellen kann, hängen stark vom Schulsystem ab. Entscheidend für die möglichen Anforderungen ist, ob die Schüler eine geistige Elite bilden oder ob die Schule es mit einer Massenerziehung zu tun hat. Auch müssen die Anforderungen an den Schüler von seinem Alter abhängen. So muss etwa die Einführung in die Geometrie ganz verschieden vorgenommen werden, je nachdem die Schüler 10 oder 20 Jahre alt sind. Schliesslich muss auch die Art der Darstellung eines Stoffes von der Zahl der Wochenstunden und dem möglichen Umfang der Hausarbeiten abhängig gemacht werden. Diese Bedingungen sind aber in verschiedenen Ländern und erst recht auf verschiedenen Kontinenten ganz verschieden. So stösst selbst die sehr reizvolle Aufgabe, ein französisch-deutsches Unterrichtswerk zu schreiben, auf ungewöhnliche Schwierigkeiten, obwohl in der Auswahl der Schüler und den Anforderungen der Schule die französischen und deutschen Schulen sich ähneln.

Man muss das Lehrsystem eines Landes sehr genau kennen, um fähig zu sein, ein brauchbares Lehrbuch schreiben zu können.

Im allgemeinen werden Universitätslehrer nicht in der Lage sein, Schulbücher für die Schulen ihres Landes zu verfassen. Es fehlen ihnen die Erfahrungen im Schulunterricht. Andererseits haben die Praktiker des Unterrichts, die sich dazu befähigt glauben, vor 20 oder 30 Jahren die Universität verlassen und die Fühlung mit der Forschung verloren. Ihre neuen Bücher werden schon von der nachrückenden Generation von Lehrern leicht als überholt angesehen. Denn die Auffassungen der Mathematiker von ihrer Wissenschaft ändern sich mit wachsender Geschwindigkeit. Wie viele der grundlegenden Überzeugungen der Jahrhundertwende sind heute vergessen! So etwa:

1. Die Algebra ist die Lehre von der Auflösung von Gleichungen;
2. Die analytische Geometrie ist die Lehre von den Kegelschnitten;
3. Den Kern der Funktionentheorie bilden die linearen Transformationen und die elliptischen Funktionen.

Während in den Naturwissenschaften die Veränderungen vor allem in der Vermehrung des Wissens liegt, weist die Mathematik neben einer Ausdehnung der Erkenntnisse die Erscheinung der Kontraktion durch Abstraktion auf. Das erkennen wir z. B. deutlich in der Algebra beim Vergleich der Standardwerke von Heinrich Weber (1900), B. L. van der Waerden (1932) und N. Bourbaki (1950). Wie sind jedesmal die Grundbegriffe abstrakter geworden, um mehr Stoff knapper zusammenfassen zu können!

Hinzu kommt, dass das Interesse der aufeinanderfolgenden Generationen für die einzelnen Teile der Wissenschaft wechselt. Wie wenig beachtet war in den ersten Jahrzehnten dieses Jahrhunderts die Algebra verglichen mit der Analysis.

Wer aber nach dem Studium zur Schule zurückkehrt, nimmt im allgemeinen keinen Anteil mehr an der Wandlung mathematischer Anschauungen. Dazu fehlt häufig einfach die Gelegenheit. So haben die Studenten, die eben die Gymnasien verlassen haben und von Lehrern unterrichtet sind, deren wissenschaftliche Ausbildung 10-40 Jahre zurückliegt, es schwer, sich in den modernen Vorlesungen auf den Universitäten zurecht zu finden. Eine gewisse Rücksichtnahme auf die so entstandenen Nöte der

jungen Hörer — was ein Gebot der Menschlichkeit wäre — ist unter den Professoren durchaus nicht selbstverständlich. Die Sorge wegen der Schwierigkeit des Überganges von der Schule zur Universität gab es allerdings auch schon zu Ende des 19 ten Jahrhunderts. Man lese dazu nur die IMUK-Berichte aus den Gründerjahren. In den Jahren vor dem 1. Weltkriege gab es auch schon umfangreiche Bemühungen zur Behebung dieser Sorgen. Aber heute — 40 Jahr später — ist der Hiatus zwischen der überalteten Schulmathematik und der Mathematik, wie sie an den Hochschulen gelehrt wird, unvergleichlich viel grösser — trotz vieler Neuerungen im Schulunterricht. Aber die Forschung und, mit ihr etwa schritthaltend, die Lehre an den Universitäten haben ein unvergleichlich viel grösseres Tempo angelegt. So ist es zu dieser grossen Spannung gekommen.

Es ist nun eine der Hauptaufgaben der IMUK, Vorschläge zur Minderung der Spannung zwischen Schul- und Universitätsmathematik zu machen. Dazu gehört vor allem, dass die Lehrer an unseren Gymnasien immer wieder neu geschult werden und dabei lernen, ihren Schulstoff unter den neuen wissenschaftlichen Gesichtspunkten zu sehen. So scheint es mir die erste Verpflichtung der IMUK zu sein, *die wissenschaftlichen Grundlagen der Schulmathematik* in der neuen Gestalt, wie sie sich den schaffenden Mathematikern unserer Zeit darstellen, vorzuführen. Doch wird die eigentliche Arbeit im allgemeinen durch die nationalen Unterkommissionen zu geschehen haben. Das Exekutivkomitee kann nur den äusseren Rahmen schaffen, in dem die nationalen Unterkommissionen ihre Erwägungen und das Ergebnis ihrer Arbeit vortragen, um sich so gegenseitig Anregungen und Hilfestellungen zu bieten. Internationale Beschlüsse zu Fragen des mathematischen Unterrichtes scheinen mir undenkbar zu sein. Im glücklichsten Falle kann es zur Vorlage besonders gelungener Lehrbücher oder gar zur Vorführung musterhafter Unterrichtsstunden kommen. Das mag dann für alle Unterkommissionen belehrend sein und sie anreizen, für den Bereich ihrer Länder ähnliches durchzuführen. Die Ziele der IMUK wären vollständig erreicht.

Zunächst aber müssen unsere Bemühungen darauf gerichtet sein, den Lehrern die modernen mathematischen Betrachtungs-

weisen näher zu bringen, um die Schulmathematik aus ihrer Isolierung zu befreien. Deshalb ist auch als eines der 3 Themen für diese Tagung der IMUK: „Die wissenschaftlichen Grundlagen der Schulmathematik“ gewählt worden.

Die deutsche Unterkommission legt dazu den ersten Band eines auf 4 Bände veranschlagten Werkes vor: „Grundzüge der Mathematik für Lehrer an Gymnasien...“ [2]. Dies Werk ist vornehmlich den im Schulalltag stehenden Lehrern an den Gymnasien gewidmet.

Im Vorwort des Werkes heisst es: „An diese Gymnasiallehrer ist immer zuerst gedacht worden. An ihrem Können und ihrer Liebe zu unserer Wissenschaft hängt das Schicksal des kommenden Geschlechtes von Mathematikern. Als Nachschlagewerk für sie soll diese Darstellung in erster Linie dienen.“

Die Kommission ist also vom Schulstoff ausgegangen und hat zunächst nach seinen wissenschaftlichen Grundlagen gefragt. Aber es war ihr von vornherein bewusst, dass das Wort „Grundlagen“ nicht in seinem engen axiomatischen Sinn aufgefasst werden durfte. Sicherlich kann es den Lehrern bei einer Orientierung über einen Stoff nicht alleine auf die logische Begründung ankommen. Die volle wissenschaftliche Bedeutung des Schulstoffes — also auch dessen Weiterführung — ja diese häufig mehr als die axiomatische Begründung — musste dargestellt werden. Andererseits war natürlich der Stoff zu begrenzen. An einer enzyklopädischen Darstellung konnte niemand Interesse haben.

Der Mitarbeiterkreis — es sind mehr als 100 Mitglieder — umfasst Hochschul- und Gymnasiallehrer. Jeder Artikel hat zwei Autoren, von denen einer ein Professor an einer Universität, der andere ein Lehrer an einem Gymnasium ist oder doch wenigstens aus dieser Laufbahn hervorging.

Natürlich kann man das Thema auch ganz anders auffassen, als es in diesem Werke geschehen ist. Das trifft schon für den 2. gedruckt vorgelegten Bericht zu, den der niederländischen Kommission [3]. Erst recht gilt dies für die Berichte der anderen nationalen Unterkommissionen. Aus den allgemeinen Erwägungen darf ich — ohne den nachfolgenden Rednern vorzugreifen — wenige Bemerkungen hier herausgreifen, soweit sie für viele Länder Gültigkeit haben.

M. Dubreil (Paris) spricht von den Schwierigkeiten, die der Verbesserung des Unterrichtes an den Lyceen entgegenstehen; den überfüllten Klassen und der Überlastung der Lehrer durch zu viele Unterrichtsstunden. Aber dann versichert er: Die Modernisierung des Unterrichtes macht in Frankreich grosse Fortschritte. Natürlich gibt es auch eine Opposition gegen die Neuerungen. Und ausserdem ist da die grosse Zahl derer, die sich nicht gegen die Modernisierung wenden, die es aber als zu schwierig ansehen, neben der Last ihrer Tagesarbeit Zeit für die Pflege ihrer „culture scientifique“ zu finden. Für welches Land sollte dies nicht zutreffen! Die menschliche Natur ist überall die gleiche.

Mr. Cairns-Urbana (Ill.) referiert über die Einführung neuer Lehrbücher und macht dabei die folgende Konstatierung: Im allgemeinen setzen sich Änderungen in den mathematischen Kursen nur langsam durch. Trotzdem ist der gesamte Effekt der kleinen Änderungen so beträchtlich, dass mathematische Lehrbücher in unserer Zeit sich wesentlich von denen unterscheiden, die eine Generation vorher gebraucht wurden.

Und schliesslich eine Bemerkung von Mr. Daltry (London): „It is essential to realise that in England we aim at teaching children and no subjects.“ Dieser Bemerkung schenken wir unsere ungeteilte Aufmerksamkeit. Soweit damit ausgedrückt werden soll, dass der mathematische Unterricht nicht nur mathematische Anforderungen an den Lehrer stellt, sondern gleichberechtigt Anforderungen der Menschenführung, nehmen wir dasselbe für alle Länder in Anspruch. Nur würden wir nicht von „Kindern“ sprechen, wenn es sich um Gymnasiasten im Alter von 10-19 Jahren handelt. Auch müssen wir in den Schülern die späteren Erwachsenen, die bis dahin mathematisch erzogen sein wollen, zugleich sehen können.

Der Lehrer hat nicht nur eine Verantwortung vor der Gegenwart, sondern auch vor der Zukunft der Schüler. Gerade mit Hinblick darauf werden die Programme der Schulen für den mathematischen Unterricht entworfen. Diese Programme kann man nur würdigen, wenn man den gesamten Stoff, der möglicherweise in der Schule behandelt werden kann, von hoher Warte übersieht. Und damit sind wir wieder bei unserer Forderung nach

einer laufenden Weiterbildung der Lehrkräfte in der Mathematik angelangt. Dieser Weiterbildung dienen insbesondere die Anstrengungen, für die ich hier unter dem Titel: „Die wissenschaftlichen Grundlagen der Schulmathematik“ zu werben trachte.

ANMERKUNGEN

1. Siehe z.B. die *Mathematik-Lehrbücher des Vereins Schweizerischer Mathematik-Lehrer*. Verlag Orell Füssli, Zürich.
2. *Grundzüge der Mathematik für Lehrer an Gymnasien sowie für Mathematiker in Industrie und Wirtschaft*, Band I, Algebra (1958); Band II, Geometrie (1959). Verlag Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen.

DER MATHEMATISCHE UNTERRICHT DER 6- BIS 15-JÄHRIGEN JUGEND IN DER BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND

von Friedrich DRENCKHAHN

(*Reçu le 6 novembre 1958.*)

Vorbemerkung. Jedes der zehn Länder der Bundesrepublik hat sein eigenes Schulwesen. Indessen besteht die Tendenz zu einer Vereinheitlichung in der Schulorganisation und in den Lehrplänen (Richtlinien). Diese wird gestützt von der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder und den Lehrerverbänden. Wir halten uns in unserer Darstellung an die Verhältnisse, wie sie durchgängig anzutreffen sind.

Das Schulwesen ist nach dem Gabelungssystem organisiert, derart, daß sich auf einer vierjährigen Grundschule die 4-(5-)jährige Volksschuloberstufe, die 6-jährige Mittelschule und das 9-jährige Gymnasium als allgemeinbildende Schulen mit Vollzeitunterricht vertikal nebeneinander aufbauen. Die Volks- und Mittelschulen finden ihre Fortsetzung in berufsbildenden Schulen mit Teilzeitunterricht. Vollzeitschulpflicht besteht vom 6. bis zum 14. (15.) Lebensjahr, anschließend Teilzeitschulpflicht