

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 5 (1959)  
**Heft:** 3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SPECIAL CASE OF KUMMER'S CONGRUENCE  
**Autor:** Carlitz, L.

**Bibliographie**  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-35487>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 02.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

As in the case  $n$  even, it will suffice to take  $r \equiv 3 \pmod{4}$ . Let  $2^{e_r}$  denote the highest power of 2 dividing  $r + 1$ , and consider  $2^{-e_r} T$ . For  $e_r \leq 2$ , we get the exponent  $-1$ ; for  $e_r \geq 3$  it follows that  $\frac{1}{2}(r - 1) \geq e_r$ . Hence if  $k + 2 < e_r$ , we get the exponent  $k + 2 - e_r$ , while if  $k + 2 \geq e_r$  we again get  $-1$  (at most). Consequently

$$\Delta_n \equiv 0 \pmod{2^{3n-e+k+2}} \quad (k + 2 < e_r) , \quad (16)$$

$$\Delta_n \equiv 0 \pmod{2^{3n-1}} \quad (k + 2 \geq e_r) . \quad (17)$$

Comparing (16) and (17) with (13) and (14) we may accordingly state the following

**THEOREM.** *Let  $2^e \leq 2n < 2^{e+1}$  and let  $2^k$  denote the highest power of 2 dividing  $n$  or  $n - 1$  according as  $n$  is even or odd. Then  $\Delta_n$  as defined by (1) and (3) satisfies (16) and (17). Applying the Staudt-Clausen theorem, it follows from (3) that*

$$p\Delta_n \equiv - \sum_{r>0} (-1)^{n-rm} \binom{n}{rm} \pmod{p} ,$$

where  $p = 2m + 1$  is an odd prime. It can be shown that

$$\sum_{r>0} (-1)^{n-rm} \binom{n}{rm} \equiv \begin{cases} 2 & (p - 1 \mid n) \\ \binom{m}{k} & (p - 1 \mid n + k, 0 < k \leq m) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

In particular the prime factors of the denominator of  $\Delta_n$  are simple and cannot exceed  $2n + 1$ .

In connection with formula (4) above it may be of interest to cite the formula [2, p. 189]

$$(-1)^n \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \frac{B_{n+r+1}}{n+r+1} + \frac{n! n!}{2(2n+1)!} = 0 .$$

#### REFERENCES

1. G. FROBENIUS, *Über die Bernoullischen Zahlen und die Eulerschen Polynome*, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften* (1910), pp. 809-847.
2. N. NIELSEN, *Traité élémentaire des nombres de Bernoulli*. Paris, 1923.
3. N. E. NÖRLUND, *Vorlesungen über Differenzenrechnung*. Berlin, 1924.  
Duke University.