DIVERGENCE DE LA SÉRIE HARMONIQUE D'APRÈS MENGOLI (1650)

Autor(en): **Karamata, J.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1959)**

Heft 2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-35478

DIVERGENCE DE LA SÉRIE HARMONIQUE D'APRÈS MENGOLI (1650)

par J. Karamata, Genève

(Reçu le 1er février 1957.)

On attribue souvent aux Bernoulli, Jean (1677-1748) et Jacques (1654-1705), les premières démonstrations de la divergence de la série harmonique [1])

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

En réalité, Pietro Mengoli [2]) (1625-1686) en avait donné antérieurement une démonstration fort élégante, qui, transcrite en langage actuel, prend une forme très simple et parfaitement rigoureuse.

Mengoli établit d'abord que, *dans toute progression harmonique, la moyenne arithmétique de trois termes consécutifs est supérieure au terme du milieu.* Pour la série envisagée, cela équivaut à l'inégalité

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) > \frac{1}{n}, \qquad n = 2, 3, 4, \dots .$$

---

1) Les méthodes de Jean et de Jacques Bernoulli se trouvent exposées dans: Moritz Cantor, *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*, 2e édition, Leipzig (1901); t. III, pp. 93-95.

Voici quelques données historiques plus précises que je dois à M. J. E. Hofmann. C'est Jean Bernoulli qui remarqua d'abord la divergence de la série harmonique, dont la démonstration se trouve dans: *Opera omnia*, Lausanne-Genève, 1742 (en réalité 1743), vol. IV, p. 8. L'ayant communiquée à Jacques Bernoulli, ce dernier en donna deux autres qui se trouvent dans: *Basileensis Opera*, Genève, 1744, vol. I, pp. 392-4: Première dissertation sur les séries (1689), proposition 16, et vol. I, pp. 529-30: Deuxième dissertation sur les séries, proposition 24. Traduction en allemand par Gerhard Kowalewski, Leipzig, 1903 (*Ostwalds Klassiker*, n° 71), pp. 17-19 et 34-35.

Les Bernoulli ne savaient rien sur Mengoli, par contre Leibniz connaissait sa démonstration (voir J. E. Hofmann, *Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik*, München, 1949, p. 184). Dans sa lettre à Jean Bernoulli, Leibniz mentionne la divergence des séries harmoniques sans toutefois citer Mengoli (voir Leibniz, *Mathematische Schriften* (F. Gerhardt), vol. III, Halle, 1855, p. 165: Brief an Jh. Bernoulli von 28.II (10.III) 1695).

2) *Novae quadraturae arithmeticae, sed De Additione Fractionum*, Bologne (1650). Voir G. Eneström, Zur Geschichte der unendlichen Reihen um die Mitte des siebzehnten Jahrhunderts; *Bibliotheca mathematica* (3), 12, pp. 135-148 (1911).

En désignant alors par k, le plus grand entier tel que

$$3k + 1 \leqslant n\,,$$

c'est-à-dire, en posant

$$k = \left[\frac{n-1}{3}\right],$$

on aura, pour la somme H_n des n premiers termes de la série harmonique

$$\begin{aligned} H_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \geqslant \\ &\geqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{3k-1} + \frac{1}{3k} + \frac{1}{3k+1} > \\ &> 1 + 3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{3k}\right) = \\ &> 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}\right); \end{aligned}$$

donc

$$H_n > 1 + H_k \quad \text{avec} \quad k = \left[\frac{n-1}{3}\right].$$

Il en résulte que la suite H_n ne peut converger, car l'hypothèse

$$\lim_{n=\infty} H_n = H$$

aboutirait à la contradiction

$$H \geqslant 1 + H\,.$$

Pour en déduire que $H_n \to \infty$, il faut toutefois recourir au théorème fondamental, relatif aux suites monotones, d'après lequel: « *toute suite non décroissante tend ou bien vers une limite finie ou bien vers l'infini* », théorème qui se trouve également énoncé dans l'ouvrage cité de Mengoli (voir ENESTRÖM, *l. c.* [3]), p. 145).

La simplicité de cette démonstration suggère les remarques suivantes.

Enpremier lieu [4]), on peut l'abréger, si, partant de l'inégalité évidente

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n}\,, \qquad n = 2, 3, \dots,$$

---

[3]) Voir page précédente.

[4]) Voir Jos. E. HOFMANN, Ueber Jakob Bernoullis Beiträge zur Infinitesimalmathematik. *Monographies de l'Enseignement mathématique*, n° 3, Genève, 1957, pp. 15-16 et 64-65, en particulier p. 65.

on envisage dans la série harmonique les groupes de deux termes consécutifs à partir du troisième. Ainsi, en posant

$$k = \left[\frac{n}{2}\right],$$

on aura

$$\mathrm{H}_n \geqslant \mathrm{H}_{2k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2\,k - 1} + \frac{1}{2\,k} >$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2\,k}\right) = \frac{1}{2} + \mathrm{H}_k .$$

Donc

$$\mathrm{H}_n > \frac{1}{2} + \mathrm{H}_k \quad \text{avec} \quad k = \left[\frac{n}{2}\right],$$

d'où l'on tire la même conclusion que précédemment.

En second lieu cette même idée conduit à une démonstration très simple de la convergence de la série

$$\sum \frac{1}{n^s}, \qquad \text{pour } s > 1 .$$

En effet, de l'inégalité

$$\frac{1}{n^s} + \frac{1}{(n+1)^s} < \frac{2}{n^s}, \qquad n = 1, 2, 3, \dots,$$

on déduit, pour la somme $\mathrm{H}_n(s)$ des n premiers termes de cette série,

$$\mathrm{H}_n(s) < \mathrm{H}_{2n+1}(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{(2\,n)^s} + \frac{1}{(2\,n+1)^s} <$$

$$< 1 + 2\left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \dots + \frac{1}{(2\,n)^s}\right) =$$

$$< 1 + \frac{1}{2^{s-1}}\,\mathrm{H}_n(s),$$

d'où, puisque $s > 1$,

$$\mathrm{H}_n(s) < \frac{2^{s-1}}{2^{s-1} - 1} .$$

Aussi, la suite $\mathrm{H}_n(s)$ étant croissante et bornée, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

converge pour tout $s > 1$.