

Zeitschrift:	L'Enseignement Mathématique
Herausgeber:	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band:	5 (1959)
Heft:	2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 Artikel:	DIVERGENCE DE LA SÉRIE HARMONIQUE D'APRÈS MENGOLI (1650)
Autor:	Karamata, J.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-35478

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 25.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

DIVERGENCE DE LA SÉRIE HARMONIQUE D'APRÈS MENGOLI (1650)

par J. KARAMATA, Genève

(*Reçu le 1er février 1957.*)

On attribue souvent aux Bernoulli, Jean (1677-1748) et Jacques (1654-1705), les premières démonstrations de la divergence de la série harmonique¹⁾

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

En réalité, Pietro Mengoli²⁾ (1625-1686) en avait donné antérieurement une démonstration fort élégante, qui, transcrise en langage actuel, prend une forme très simple et parfaitement rigoureuse.

Mengoli établit d'abord que, *dans toute progression harmonique, la moyenne arithmétique de trois termes consécutifs est supérieure au terme du milieu.* Pour la série envisagée, cela équivaut à l'inégalité

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) > \frac{1}{n}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

¹⁾ Les méthodes de Jean et de Jacques Bernoulli se trouvent exposées dans: Moritz CANTOR, *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*, 2^e édition, Leipzig (1901); t. III, pp. 93-95.

Voici quelques données historiques plus précises que je dois à M. J. E. HOFMANN. C'est Jean Bernoulli qui remarqua d'abord la divergence de la série harmonique, dont la démonstration se trouve dans: *Opera omnia*, Lausanne-Genève, 1742 (en réalité 1743), vol. IV, p. 8. L'ayant communiquée à Jacques Bernoulli, ce dernier en donna deux autres qui se trouvent dans: *Basileensis Opera*, Genève, 1744, vol. I, pp. 392-4: Première dissertation sur les séries (1689), proposition 16, et vol. I, pp. 529-30: Deuxième dissertation sur les séries, proposition 24. Traduction en allemand par Gerhard Kowalewski, Leipzig, 1903 (*Ostwalds Klassiker*, n° 71), pp. 17-19 et 34-35.

Les Bernoulli ne savaient rien sur Mengoli, par contre Leibniz connaissait sa démonstration (voir J. E. HOFMANN, *Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik*, München, 1949, p. 184). Dans sa lettre à Jean Bernoulli, Leibniz mentionne la divergence des séries harmoniques sans toutefois citer Mengoli (voir LEIBNIZ, *Mathematische Schriften* (F. Gerhardt), vol. III, Halle, 1855, p. 165: Brief an Jh. Bernoulli von 28.II (10.III) 1695).

²⁾ *Nova quadratura arithmeticæ, sed De Additione Fractionum*, Bologne (1650). Voir G. ENESTRÖM, Zur Geschichte der unendlichen Reihen um die Mitte des siebzehnten Jahrhunderts; *Bibliotheca mathematica* (3), 12, pp. 135-148 (1911).

En désignant alors par k , le plus grand entier tel que

$$3k + 1 \leq n,$$

c'est-à-dire, en posant

$$k = \left[\frac{n-1}{3} \right],$$

on aura, pour la somme H_n des n premiers termes de la série harmonique

$$\begin{aligned} H_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \geq \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{3k-1} + \frac{1}{3k} + \frac{1}{3k+1} > \\ &> 1 + 3 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{3k} \right) = \\ &> 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \right); \end{aligned}$$

donc

$$H_n > 1 + H_k \quad \text{avec} \quad k = \left[\frac{n-1}{3} \right].$$

Il en résulte que la suite H_n ne peut converger, car l'hypothèse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = H$$

aboutirait à la contradiction

$$H \geq 1 + H.$$

Pour en déduire que $H_n \rightarrow \infty$, il faut toutefois recourir au théorème fondamental, relatif aux suites monotones, d'après lequel: «*toute suite non décroissante tend ou bien vers une limite finie ou bien vers l'infini*», théorème qui se trouve également énoncé dans l'ouvrage cité de Mengoli (voir ENESTRÖM, *l. c.*³), p. 145).

La simplicité de cette démonstration suggère les remarques suivantes.

En premier lieu⁴), on peut l'abréger, si, partant de l'inégalité évidente

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right) > \frac{1}{n}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

³⁾ Voir page précédente.

⁴⁾ Voir Jos. E. HOFMANN, Ueber Jakob Bernoullis Beiträge zur Infinitesimalmathematik. *Monographies de l'Enseignement mathématique*, n° 3, Genève, 1957, pp. 15-16 et 64-65, en particulier p. 65.

on envisage dans la série harmonique les groupes de deux termes consécutifs à partir du troisième. Ainsi, en posant

$$k = \left[\frac{n}{2} \right],$$

on aura

$$\begin{aligned} H_n &\geq H_{2k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} > \\ &> 1 + \frac{1}{2} + 2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} + H_k. \end{aligned}$$

Donc

$$H_n > \frac{1}{2} + H_k \quad \text{avec} \quad k = \left[\frac{n}{2} \right],$$

d'où l'on tire la même conclusion que précédemment.

En second lieu cette même idée conduit à une démonstration très simple de la convergence de la série

$$\sum \frac{1}{n^s}, \quad \text{pour } s > 1.$$

En effet, de l'inégalité

$$\frac{1}{n^s} + \frac{1}{(n+1)^s} < \frac{2}{n^s}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

on déduit, pour la somme $H_n(s)$ des n premiers termes de cette série,

$$\begin{aligned} H_n(s) &< H_{2n+1}(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{(2n)^s} + \frac{1}{(2n+1)^s} < \\ &< 1 + 2 \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \dots + \frac{1}{(2n)^s} \right) = \\ &< 1 + \frac{1}{2^{s-1}} H_n(s), \end{aligned}$$

d'où, puisque $s > 1$,

$$H_n(s) < \frac{2^{s-1}}{2^{s-1} - 1}.$$

Aussi, la suite $H_n(s)$ étant croissante et bornée, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

converge pour tout $s > 1$.