Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 5 (1959)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CALCUL D'UNE INTÉGRALE DOUBLE PAR DEUX INTÉGRATIONS SIMPLES SUCCESSIVES (INTÉGRALE DE RIEMANN)

Autor: Godefroid, Michel

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-35475

CALCUL D'UNE INTÉGRALE DOUBLE PAR DEUX INTÉGRATIONS SIMPLES SUCCESSIVES (INTÉGRALE DE RIEMANN)

PAR

Michel GODEFROID (Montpellier)

(Reçu le 15 juin 1958)

Nous nous proposons d'établir le résultat suivant: *soit* f (x, y) *une fonction bornée intégrable au sens de Riemann dans le carré* C *de centre* O *de côtés parallèles aux axes et de longueur* 2a. *Pour toute fonction* F (x) *satisfaisant sur* [— a, a] *aux conditions*

$$\underline{\int}_{-a}^{a} f(x, y)\, dy \leqslant F(x) \leqslant \overline{\int}_{-a}^{a} f(x, y)\, dy$$

$$\left(\overline{\int} \textit{ et } \underline{\int} \textit{ intégrales sup. et inf. de Darboux}\right),$$

$$\int_{-a}^{a} F(x)\, dx \textit{ existe et est égale à } \iint_C f(x, y)\, dx\, dy\,.$$

Pour démontrer ce résultat, nous nous appuierons sur les inégalités suivantes: pour toute fonction g bornée dans C,

$$\overline{\iint}_C g(x, y)\, dx\, dy \geqslant \overline{\int}_{-a}^{a} dx\, \overline{\int}_{-a}^{a} g(x, y)\, dy$$

et

$$\underline{\iint}_C g(x, y)\, dx\, dy \leqslant \underline{\int}_{-a}^{a} dx\, \underline{\int}_{-a}^{a} g(x, y)\, dy\,.$$

Démontrons, par exemple, la première: divisons C en n^2 carrés partiels par les verticales d'abscisses $x_0 = -a$, $x_1 = -a + \frac{2a}{n}$, ..., $x_{n-1} = a - \frac{2a}{n}$, $x_n = a$ et les horizontales d'ordonnées analogues. Soit α une valeur quelconque de $[x_i, x_{i+1}]$; M_j désignant la borne sup. de g sur le $j$ème carré pour la numérotation par colonnes verticales successives,

$$\overline{\int}_{-a}^{a} g(x, y)\, dy \leqslant \frac{2a}{n} \sum_{j=1+ni}^{n(i+1)} M_j\,.$$

Ceci étant vrai, pour tout α de $[x_i, x_{i+1}]$,

$$\overline{\int}_{x_i}^{x_{i+1}} dx \overline{\int}_{-a}^{a} g(x, y)\, dy \leqslant \frac{4a^2}{n^2} \sum_{j=1+ni}^{n(i+1)} \mathrm{M}_j .$$

En formant la somme pour tous les intervalles (x_i, x_{i+1}), on obtient

$$\overline{\int}_{-a}^{a} dx \overline{\int}_{-a}^{a} g(x, y)\, dy \leqslant \frac{4a^2}{n^2} \sum_{j=1}^{n^2} \mathrm{M}_j .$$

Mais le deuxième membre peut être rendu arbitrairement voisin de

$$\overline{\iint}_{C} g(x, y)\, dx\, dy ,$$

d'où le résultat annoncé.

De ces inégalités résulte, si f est intégrable dans C,

$$\underline{\int}_{-a}^{a} dx \underline{\int}_{-a}^{a} f(x, y)\, dy = \iint_C f(x, y)\, dx\, dy = \overline{\int}_{-a}^{a} dx \overline{\int}_{-a}^{a} f(x, y)\, dy$$

donc, si F (x) satisfait aux conditions indiquées,

$$\overline{\int}_{-a}^{a} \mathrm{F}(x)\, dx = \underline{\int}_{-a}^{a} \mathrm{F}(x)\, dx$$

ce qui signifie que F est intégrable sur le segment $(-a, a)$, son intégrale étant égale à

$$\iint_C f(x, y)\, dx\, dy .$$

De plus, l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles

$$\overline{\int}_{-a}^{a} f(x, y)\, dy \neq \underline{\int}_{-a}^{a} f(x, y)\, dy$$

est la réunion des ensembles où

$$\overline{\int}_{-a}^{a} f(x, y)\, dy \geqslant \underline{\int}_{-a}^{a} f(x, y)\, dy + \frac{1}{p}, \; p \text{ entier} > 0.$$

Ces ensembles (en infinité dénombrable) sont chacun d'étendue (intégrale de Riemann de la fonction caractéristique) nulle.

Le résultat indiqué s'étend immédiatement au cas classique de l'intégrale d'une fonction continue sur un compact convexe K, il suffit de considérer un carré C contenant K et de prolonger f par 0 hors de K, ce qui donne une fonction intégrable sur C.

* * *

Légèrement affaibli, notre énoncé signifie que

$$\iint_C f(x, y)\,dx\,dy = \int_{-a}^{a} dx \int_{-a}^{a} f(x, y)\,dy$$

chaque fois que les deux membres ont un sens (selon la définition de Riemann). On peut se demander si l'existence du second membre entraîne l'existence du premier. Il n'en est rien, comme le montre l'exemple suivant: soit u_n une suite de rationnels de $[-1, 1]$ partout dense sur ce segment, E l'ensemble des points de coordonnées $\frac{p}{q}$, u_q, $q > |p| > 0$ entiers premiers entre eux, f la fonction caractéristique de E. On vérifie que sur toute verticale il y a au plus un point en lequel $f \neq 0$ d'où

$$\int_{-a}^{a} dx \int_{-a}^{a} f(x, y)\,dy = 0 .$$

Sur l'horizontale d'ordonnée $\frac{p}{q}$ il y a au plus $2q$ points en lesquels $f \neq 0$ et sur une horizontale d'ordonnée irrationnelle, il n'y en a pas, donc

$$\int_{-a}^{a} dy \int_{-a}^{a} f(x, y)\,dx = 0 .$$

Mais tout point de C est point de discontinuité de f (par rapport à l'ensemble des variables), f n'est intégrable sur aucun carré partiel.