

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 5 (1959)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** CALCUL D'UNE INTÉGRALE DOUBLE PAR DEUX INTÉGRATIONS  
SIMPLES SUCCESSIVES (INTÉGRALE DE RIEMANN)  
**Autor:** Godefroid, Michel  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-35475>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# CALCUL D'UNE INTÉGRALE DOUBLE PAR DEUX INTÉGRATIONS SIMPLES SUCCESSIVES (INTÉGRALE DE RIEMANN)

PAR

Michel GODEFROID (Montpellier)

(Reçu le 15 juin 1958)

Nous nous proposons d'établir le résultat suivant: soit  $f(x, y)$  une fonction bornée intégrable au sens de Riemann dans le carré  $C$  de centre  $O$  de côtés parallèles aux axes et de longueur  $2a$ . Pour toute fonction  $F(x)$  satisfaisant sur  $[-a, a]$  aux conditions

$$\int_{-a}^a f(x, y) dy \leq F(x) \leq \overline{\int}_{-a}^a f(x, y) dy$$

( $\overline{\int}$  et  $\underline{\int}$  intégrales sup. et inf. de Darboux),

$$\int_{-a}^a F(x) dx \text{ existe et est égale à } \iint_C f(x, y) dx dy.$$

Pour démontrer ce résultat, nous nous appuierons sur les inégalités suivantes: pour toute fonction  $g$  bornée dans  $C$ ,

$$\overline{\iint}_C g(x, y) dx dy \geq \overline{\int}_{-a}^a dx \overline{\int}_{-a}^a g(x, y) dy$$

et

$$\underline{\iint}_C g(x, y) dx dy \leq \underline{\int}_{-a}^a dx \underline{\int}_{-a}^a g(x, y) dy.$$

Démontrons, par exemple, la première: divisons  $C$  en  $n^2$  carrés partiels par les verticales d'abscisses  $x_0 = -a$ ,  $x_1 = -a + \frac{2a}{n}$ , ...,  $x_{n-1} = a - \frac{2a}{n}$ ,  $x_n = a$  et les horizontales d'ordonnées analogues. Soit  $\alpha$  une valeur quelconque de  $[x_i, x_{i+1}]$ ;  $M_j$  désignant la borne sup. de  $g$  sur le  $j$ ème carré pour la numérotation par colonnes verticales successives,

$$\overline{\int}_{-a}^a g(x, y) dy \leq \frac{2a}{n} \sum_{j=1+ni}^{n(i+1)} M_j.$$

Ceci étant vrai, pour tout  $\alpha$  de  $[x_i, x_{i+1}]$ ,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \int_{-a}^a g(x, y) dy \leq \frac{4a^2}{n^2} \sum_{j=1+ni}^{n(i+1)} M_j.$$

En formant la somme pour tous les intervalles  $(x_i, x_{i+1})$ , on obtient

$$\int_{-a}^a dx \int_{-a}^a g(x, y) dy \leq \frac{4a^2}{n^2} \sum_{j=1}^{n^2} M_j.$$

Mais le deuxième membre peut être rendu arbitrairement voisin de

$$\iint_C g(x, y) dx dy,$$

d'où le résultat annoncé.

De ces inégalités résulte, si  $f$  est intégrable dans  $C$ ,

$$\int_{-a}^a dx \int_{-a}^a f(x, y) dy = \iint_C f(x, y) dx dy = \int_{-a}^a dx \int_{-a}^a f(x, y) dy$$

donc, si  $F(x)$  satisfait aux conditions indiquées,

$$\int_{-a}^a F(x) dx = \int_{-a}^a F(x) dx$$

ce qui signifie que  $F$  est intégrable sur le segment  $(-a, a)$ , son intégrale étant égale à

$$\iint_C f(x, y) dx dy.$$

De plus, l'ensemble des valeurs de  $x$  pour lesquelles

$$\int_{-a}^a f(x, y) dy \neq \int_{-a}^a f(x, y) dy$$

est la réunion des ensembles où

$$\int_{-a}^a f(x, y) dy \geq \int_{-a}^a f(x, y) dy + \frac{1}{p}, \quad p \text{ entier} > 0.$$

Ces ensembles (en infinité dénombrable) sont chacun d'étendue (intégrale de Riemann de la fonction caractéristique) nulle.

Le résultat indiqué s'étend immédiatement au cas classique de l'intégrale d'une fonction continue sur un compact convexe  $K$ , il suffit de considérer un carré  $C$  contenant  $K$  et de prolonger  $f$  par 0 hors de  $K$ , ce qui donne une fonction intégrable sur  $C$ .

\* \* \*

Légèrement affaibli, notre énoncé signifie que

$$\iint_C f(x, y) dx dy = \int_{-a}^a dx \int_{-a}^a f(x, y) dy$$

chaque fois que les deux membres ont un sens (selon la définition de Riemann). On peut se demander si l'existence du second membre entraîne l'existence du premier. Il n'en est rien, comme le montre l'exemple suivant: soit  $u_n$  une suite de rationnels de  $[-1, 1]$  partout dense sur ce segment,  $E$  l'ensemble des points de coordonnées  $\frac{p}{q}$ ,  $u_q$ ,  $q > |p| > 0$  entiers premiers entre eux,  $f$  la fonction caractéristique de  $E$ . On vérifie que sur toute verticale il y a au plus un point en lequel  $f \neq 0$  d'où

$$\int_{-a}^a dx \int_{-a}^a f(x, y) dy = 0.$$

Sur l'horizontale d'ordonnée  $\frac{p}{q}$  il y a au plus  $2q$  points en lesquels  $f \neq 0$  et sur une horizontale d'ordonnée irrationnelle, il n'y en a pas, donc

$$\int_{-a}^a dy \int_{-a}^a f(x, y) dx = 0.$$

Mais tout point de  $C$  est point de discontinuité de  $f$  (par rapport à l'ensemble des variables),  $f$  n'est intégrable sur aucun carré partiel.