Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 5 (1959)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR L'EXEMPLE, DONNÉ PAR M. DE RHAM, D'UNE FONCTION CONTINUE SANS DÉRIVÉE

Autor: Kahane, Jean-Pierre

Kapitel: 3. Exemple d'une fonction continue, dont le module de continuité en chaque point est minoré par une fonction DONNÉE.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-35474

partout. Nous devons donc supposer, pour construire notre exemple, que $\lim\limits_{h \to \infty} h^{-1} \chi(h) = \infty$. Moyennant cette hypothèse, la construction est possible.

Considérons en effet

$$g(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-k_\nu} \varphi(2^{k_\nu} x) \tag{5}$$

où k_ν est une suite d'entiers croissants à déterminer. Le raisonnement de M. de Rham montre que g n'est dérivable en aucun point.

D'autre part

$$|g(x+h) - g(x)| < \nu h + 2 \cdot 2^{-k_\nu + 1} \text{ pour tout } \nu .$$

Soit $\omega(h)$ le module de continuité de g; pour $2^{-k_\nu+1} \leqslant h < 2^{-k_\nu}$, on a $\omega(h) < (\nu + 2) h$.

Quitte à diminuer $\chi(h)$, on peut supposer $h^{-1} \chi(h) \uparrow \infty$ et $\chi(h) \downarrow 0$ quand $h \downarrow 0$. Il suffit alors de choisir $\{k_\nu\}$ de sorte que $\nu + 2 < 2^{k_\nu} \chi\left(2^{-k_\nu}\right)$ pour avoir $\omega(h) < \chi(h)$ pour tout $h > 0$.

Ainsi, dans toute classe de fonctions, définie par une majoration des modules de continuité, et contenant des fonctions non lipschitziennes, il existe des fonctions n'admettant de dérivées en aucun point.

3. Exemple d'une fonction continue, dont le module de continuité en chaque point est minoré par une fonction donnée.

Soit $h > 0$, $\psi(h)$ une fonction positive tendant vers zéro quand $h \downarrow 0$. Nous allons construire une fonction continue dont le module de continuité $\omega_x(h)$ satisfait en chaque point x

$$\omega_x(h) > \psi(h) \tag{6}$$

quitte à majorer $\psi(h)$, on peut supposer ψ croissante.

Considérons

$$g_1(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu 2^{-k_\nu} \varphi(2^{k_\nu} x) \tag{7}$$

où $\{k_\nu\}$ et $\{p_\nu\}$ sont des suites croissantes de nombres positifs, à déterminer. Vu la croissance de ψ, (6) est satisfaite dès que, pour tout ν,

$$\omega_x(2^{-k_\nu}) > \psi(2^{-k_{\nu-1}}) = \varepsilon_\nu \,. \tag{8}$$

Or un calcul immédiat donne

$$\omega_x(2^{-k_\nu}) > 2^{-k_\nu}\left(\frac{1}{4}p_\nu - p_{\nu-1} - p_{\nu-2} \cdots - p_1\right) - \sum_{\nu+1}^{\infty} p_j\, 2^{-k_j} \,.$$

Donc (8) est vérifiée dès que, pour chaque j, on a

$$p_j > 13\, p_{j-1}$$

$$\left(\text{ce qui entraîne } p_{\nu-1} + p_{\nu-2} + \dots p_1 < \frac{1}{12}\, p_\nu\right)$$

$$p_{j+1}\, 2^{-k_{j+1}} < \frac{1}{13}\, p_j\, 2^{-k_j}$$

$$\left(\text{ce qui entraîne } \sum_{\nu+1}^{\infty} p_j\, 2^{-k_j} < \frac{1}{12}\, p_\nu\, 2^{-k_\nu}\right)$$

$$p_j\, 2^{-k_j} \geqslant 12\, \varepsilon_j$$

Pour cela, il suffit de choisir k_j de sorte que 1° $\varepsilon_{j+1} < \frac{1}{13}\,\varepsilon_j$; 2° $2^{k_j}\,\varepsilon_j > 13\; 2^{k_{j-1}}\,\varepsilon_{j-1}$ (ces inégalités permettent le choix de k_j, une fois fixés k_{j-1} et k_{j-2}), puis, de choisir $p_j = 12\,.\,2^{k_j}\,\varepsilon_j$.

Le lecteur aura remarqué que dans ce § 3 la fonction φ pourrait être remplacée par n'importe quelle fonction périodique lipschitzienne, non constante. En fait, les considérations du § 3 se rattachent autant à l'exemple classique de Weierstrass qu'à celui de M. de Rham, au contraire de celles du § 2.