

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 5 (1959)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR L'EXEMPLE, DONNÉ PAR M. DE RHAM, D'UNE FONCTION CONTINUE SANS DÉRIVÉE
Autor: Kahane, Jean-Pierre
Kapitel: 2. Exemple d'une fonction continue sans dérivée, dont LE MODULE DE CONTINUITÉ SATISFAIT $\omega(h) \leq \chi(h)$, ÉTANT UNE FONCTION DONNÉE.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-35474>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Maxima relatifs.

On a

$$f(x) = f_{2n-1}(x) + \sum_{k=n}^{\infty} 4^{-k} f_1(4^k x). \quad (4)$$

Pour que x soit un point où f admet un maximum relatif, il suffit donc que f_{2n-1} soit constant au voisinage de x , et que $f_1(4^k x) = 1$ pour $k \geq n$; la première condition équivaut à $x_1 + x_2 + \dots + x_{2n} = n$, la seconde, comme on l'a vu, à $x_{2k+1} + x_{2k+2} = 1$ ($k \geq n$).

Inversement, soit x un point où f admet un maximum relatif, il admet un développement unique de la forme (2); je dis qu'il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles $x_1 + x_2 + \dots + x_{2n} = n$. Sinon, en effet, $f'_n(x) = 2(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - n$ garde un signe constant pour n assez grand, soit, pour fixer les idées, le signe $+$; soit I_n le segment rectiligne du graphe de f_{n-1} qui se projette sur l'axe des x suivant le segment $[p2^{-n}, (p+1)2^{-n}]$ contenant x ; pour n assez grand, I_{n+1} est à gauche de I_n , donc I_{n+j} est à gauche de I_n ($j \geq 1$), donc le point $(x, f(x))$ est à gauche de I_n ; comme I_n est une corde du graphe de f , $f(x)$ n'est pas un maximum relatif, contrairement à l'hypothèse. Il existe donc un n tel que $x_1 + x_2 + \dots + x_{2n} = n$, et tel que, sur l'intervalle contenant x où f_{2n-1} est constant, $f(x)$ soit le maximum de f . D'après (4), il s'ensuit que $f_1(4^k x) = 1$ pour $k \geq n$.

Ainsi, l'ensemble des points où f admet un maximum relatif est l'ensemble des x , de la forme (2), satisfaisant les égalités $x_1 + x_2 + \dots + x_{2k} = k$ pour k assez grand. C'est un F_σ , dense sur la droite, de mesure nulle.

2. EXEMPLE D'UNE FONCTION CONTINUE SANS DÉRIVÉE, DONT LE MODULE DE CONTINUITÉ SATISFAIT $\omega(h) \leq \chi(h)$, χ ÉTANT UNE FONCTION DONNÉE.

Si $\lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} \chi(h) < \infty$, l'inégalité $\omega(h) \leq \chi(h)$ entraîne que la fonction est lipschitzienne ²⁾, donc admet une dérivée presque

²⁾ En vertu de l'inégalité $\omega(n\delta) \leq n\omega(\delta)$, valable pour tout $\delta > 0$ et tout entier naturel n .

partout. Nous devons donc supposer, pour construire notre exemple, que $\lim_{h \rightarrow \infty} h^{-1} \chi(h) = \infty$. Moyennant cette hypothèse, la construction est possible.

Considérons en effet

$$g(x) = \sum_{v=1}^{\infty} 2^{-k_v} \varphi(2^{k_v} x) \quad (5)$$

où k_v est une suite d'entiers croissants à déterminer. Le raisonnement de M. de Rham montre que g n'est dérivable en aucun point.

D'autre part

$$|g(x+h) - g(x)| < v h + 2 \cdot 2^{-k_v+1} \text{ pour tout } v.$$

Soit $\omega(h)$ le module de continuité de g ; pour $2^{-k_v+1} \leq h < 2^{-k_v}$, on a $\omega(h) < (v+2)h$.

Quitte à diminuer $\chi(h)$, on peut supposer $h^{-1} \chi(h) \uparrow \infty$ et $\chi(h) \downarrow 0$ quand $h \downarrow 0$. Il suffit alors de choisir $\{k_v\}$ de sorte que $v+2 < 2^{k_v} \chi(2^{-k_v})$ pour avoir $\omega(h) < \chi(h)$ pour tout $h > 0$.

Ainsi, dans toute classe de fonctions, définie par une majoration des modules de continuité, et contenant des fonctions non lipschitziennes, il existe des fonctions n'admettant de dérivées en aucun point.

3. EXEMPLE D'UNE FONCTION CONTINUE, DONT LE MODULE DE CONTINUITÉ EN CHAQUE POINT EST MINORÉ PAR UNE FONCTION DONNÉE.

Soit $h > 0$, $\psi(h)$ une fonction positive tendant vers zéro quand $h \downarrow 0$. Nous allons construire une fonction continue dont le module de continuité $\omega_x(h)$ satisfait en chaque point x

$$\omega_x(h) > \psi(h) \quad (6)$$

quitte à majorer $\psi(h)$, on peut supposer ψ croissante.

Considérons

$$g_1(x) = \sum_{v=1}^{\infty} p_v 2^{-k_v} \varphi(2^{k_v} x) \quad (7)$$