Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 5 (1959)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR L'EXEMPLE, DONNÉ PAR M. DE RHAM, D'UNE FONCTION CONTINUE SANS DÉRIVÉE

Autor: Kahane, Jean-Pierre

Kapitel: 1. Points où f admet un extremum.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-35474

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 19.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

1. Points où f admet un extremum.

Soit

$$x = \ldots, x_1 x_2 \ldots x_n \ldots \tag{2}$$

un développement de x en numération binaire (il y en a deux quand x est un nombre binaire), et soit

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} \varphi(2^k x) . \tag{3}$$

Minima relatifs.

Si $a = \ldots, a_1 a_2 \ldots a_n = p 2^{-n}$ (p entier), on a $f_{n-1}(a) = f_n(a) = \ldots = f(a)$ et réciproquement. Pour m assez grand ($m \geqslant 2n$), f_m admet en a un minimum relatif; comme $f \geqslant f_m$ et $f(a) = f_m(a)$, f admet également en a un minimum relatif. Inversement, si $f(x)$ est le minimum de f sur un segment $[a, a'] = [p 2^{-n}, (p+1) 2^{-n}]$, n impair, les relations

$$f(x) \geqslant f_{n-1}(x) , \quad f(a) = f_{n-1}(a) , \quad f(a') = f_{n-1}(a')$$

jointes au fait que f_{n-1} est linéaire et non constant sur $[a, a']$, entraînent que $x = a$ ou $x = a'$.

Donc l'*ensemble des points où* f *admet un minimum relatif est l'ensemble des nombres binaires* $\mathrm{p} 2^{-n}$. C'est un ensemble dénombrable, dense sur la droite.

Maximum.

On a $f(x) = \sum_{0}^{\infty} 4^{-k} f_1(4^k x)$. Or $f_1(4^k x)$ est maximum, et égal à 1, si et seulement si $x_{2k+1} + x_{2k+2} = 1$ (pour au moins un développement de x sous la forme (2)).

Donc *l'ensemble des points où* f *atteint son maximum, égal à 4/3, est l'ensemble des* x, *de la forme* (2), *satisfaisant* $\mathrm{x}_{2k+1} + x_{2k+2} = 1$ *pour* $\mathrm{k} = 0, 1, \ldots$ C'est un ensemble parfait totalement discontinu, de mesure nulle.

Maxima relatifs.

On a

$$f(x) = f_{2n-1}(x) + \sum_{k=n}^{\infty} 4^{-k} f_1(4^k x) . \qquad (4)$$

Pour que x soit un point où f admet un maximum relatif, il suffit donc que f_{2n-1} soit constant au voisinage de x, et que $f_1(4^k x) = 1$ pour $k \geqslant n$; la première condition équivaut à $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2n} = n$, la seconde, comme on l'a vu, à $x_{2k+1} + x_{2k+2} = 1$ $(k \geqslant n)$.

Inversement, soit x un point où f admet un maximum relatif, il admet un développement unique de la forme (2); je dis qu'il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2n} = n$. Sinon, en effet, $f'_n(x) = 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - n$ garde un signe constant pour n assez grand, soit, pour fixer les idées, le signe $+$; soit I_n le segment rectiligne du graphe de f_{n-1} qui se projette sur l'axe des x suivant le segment $[p2^{-n}, (p+1)2^{-n}]$ contenant x; pour n assez grand, I_{n+1} est à gauche de I_n, donc I_{n+j} est à gauche de I_n $(j \geqslant 1)$, donc le point $(x, f(x))$ est à gauche de I_n; comme I_n est une corde du graphe de f, $f(x)$ n'est pas un maximum relatif, contrairement à l'hypothèse. Il existe donc un n tel que $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2n} = n$, et tel que, sur l'intervalle contenant x où f_{2n-1} est constant, $f(x)$ soit le maximum de f. D'après (4), il s'ensuit que $f_1(4^k x) = 1$ pour $k \geqslant n$.

Ainsi, l'ensemble des points où f *admet un maximum relatif est l'ensemble des* x, *de la forme (2), satisfaisant les égalités* $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2k} = k$ *pour* k *assez grand.* C'est un F_σ, dense sur la droite, de mesure nulle.

2. Exemple d'une fonction continue sans dérivée, dont le module de continuité satisfait $\omega(h) \leqslant \chi(h)$, χ étant une fonction donnée.

Si $\varliminf_{h \to 0} h^{-1} \chi(h) < \infty$, l'inégalité $\omega(h) \leqslant \chi(h)$ entraîne que la fonction est lipschitzienne [2], donc admet une dérivée presque

[2] En vertu de l'inégalité $\omega(n\delta) \leqslant n\omega(\delta)$, valable pour tout $\delta > 0$ et tout entier naturel n.