

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 5 (1959)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR L'EXEMPLE, DONNÉ PAR M. DE RHAM, D'UNE FONCTION CONTINUE SANS DÉRIVÉE
Autor: Kahane, Jean-Pierre
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-35474>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR L'EXEMPLE, DONNÉ PAR M. DE RHAM, D'UNE FONCTION CONTINUE SANS DÉRIVÉE

PAR

Jean-Pierre KAHANE (Montpellier)

(Reçu le 16 juin 1958)

Un exemple très simple de fonction continue sans dérivée a été donné par M. G. de Rham dans l'*Enseignement mathématique* (III, 1, 1957, p. 71-72). Il s'agit de la fonction

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \varphi(2^k x) \quad (1)$$

où

$$\varphi(x) = |x| \quad \text{si} \quad |x| \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \varphi(x+1) = \varphi(x).$$

Cet exemple se prête à des remarques intéressantes¹⁾. En premier lieu, nous mettrons en évidence les ensembles de points où f admet un extremum (minimum relatif, maximum, maximum relatif); c'est là un simple exercice, pouvant illustrer un cours d'analyse. En second lieu, nous verrons que l'exemple de M. de Rham, à peine modifié, témoigne qu'aucune condition de majoration sur le module de continuité d'une fonction, strictement plus faible que la condition de Lipschitz, n'assure la dérivabilité fut-ce en un seul point. Enfin, une modification supplémentaire permet de construire facilement une fonction continue dont le module de continuité en chaque point est « aussi mauvais qu'on veut ».

¹⁾ C'est ainsi que M. de Vito a montré, dans le vol. IV, fasc. 3, que f appartient à la classe $\text{Lip } \alpha$ pour tout α positif inférieur à 1. Notre remarque n° 3 apporte une précision à l'observation faite par M. de Rham, et rapportée par M. de Vito, qu'on peut construire des fonctions continues sans dérivées, n'appartenant à aucune classe $\text{Lip } \alpha$.

1. POINTS OÙ f ADMET UN EXTREMUM.

Soit

$$x = \dots, x_1 x_2 \dots x_n \dots \quad (2)$$

un développement de x en numération binaire (il y en a deux quand x est un nombre binaire), et soit

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n 2^{-k} \varphi(2^k x). \quad (3)$$

Minima relatifs.

Si $a = \dots, a_1 a_2 \dots a_n = p2^{-n}$ (p entier), on a $f_{n-1}(a) = f_n(a) = \dots = f(a)$ et réciproquement. Pour m assez grand ($m \geq 2n$), f_m admet en a un minimum relatif; comme $f \geq f_m$ et $f(a) = f_m(a)$, f admet également en a un minimum relatif. Inversement, si $f(x)$ est le minimum de f sur un segment $[a, a'] = [p2^{-n}, (p+1)2^{-n}]$, n impair, les relations

$$f(x) \geq f_{n-1}(x), \quad f(a) = f_{n-1}(a), \quad f(a') = f_{n-1}(a')$$

jointes au fait que f_{n-1} est linéaire et non constant sur $[a, a']$, entraînent que $x = a$ ou $x = a'$.

Donc l'ensemble des points où f admet un minimum relatif est l'ensemble des nombres binaires $p2^{-n}$. C'est un ensemble dénombrable, dense sur la droite.

Maximum.

On a $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k} f_1(4^k x)$. Or $f_1(4^k x)$ est maximum, et égal à 1, si et seulement si $x_{2k+1} + x_{2k+2} = 1$ (pour au moins un développement de x sous la forme (2)).

Donc l'ensemble des points où f atteint son maximum, égal à $4/3$, est l'ensemble des x , de la forme (2), satisfaisant $x_{2k+1} + x_{2k+2} = 1$ pour $k = 0, 1, \dots$. C'est un ensemble parfait totalement discontinu, de mesure nulle.

Maxima relatifs.

On a

$$f(x) = f_{2n-1}(x) + \sum_{k=n}^{\infty} 4^{-k} f_1(4^k x). \quad (4)$$

Pour que x soit un point où f admet un maximum relatif, il suffit donc que f_{2n-1} soit constant au voisinage de x , et que $f_1(4^k x) = 1$ pour $k \geq n$; la première condition équivaut à $x_1 + x_2 + \dots + x_{2n} = n$, la seconde, comme on l'a vu, à $x_{2k+1} + x_{2k+2} = 1$ ($k \geq n$).

Inversement, soit x un point où f admet un maximum relatif, il admet un développement unique de la forme (2); je dis qu'il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles $x_1 + x_2 + \dots + x_{2n} = n$. Sinon, en effet, $f'_n(x) = 2(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - n$ garde un signe constant pour n assez grand, soit, pour fixer les idées, le signe $+$; soit I_n le segment rectiligne du graphe de f_{n-1} qui se projette sur l'axe des x suivant le segment $[p2^{-n}, (p+1)2^{-n}]$ contenant x ; pour n assez grand, I_{n+1} est à gauche de I_n , donc I_{n+j} est à gauche de I_n ($j \geq 1$), donc le point $(x, f(x))$ est à gauche de I_n ; comme I_n est une corde du graphe de f , $f(x)$ n'est pas un maximum relatif, contrairement à l'hypothèse. Il existe donc un n tel que $x_1 + x_2 + \dots + x_{2n} = n$, et tel que, sur l'intervalle contenant x où f_{2n-1} est constant, $f(x)$ soit le maximum de f . D'après (4), il s'ensuit que $f_1(4^k x) = 1$ pour $k \geq n$.

Ainsi, l'ensemble des points où f admet un maximum relatif est l'ensemble des x , de la forme (2), satisfaisant les égalités $x_1 + x_2 + \dots + x_{2k} = k$ pour k assez grand. C'est un F_σ , dense sur la droite, de mesure nulle.

2. EXEMPLE D'UNE FONCTION CONTINUE SANS DÉRIVÉE, DONT LE MODULE DE CONTINUITÉ SATISFAIT $\omega(h) \leq \chi(h)$, χ ÉTANT UNE FONCTION DONNÉE.

Si $\lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} \chi(h) < \infty$, l'inégalité $\omega(h) \leq \chi(h)$ entraîne que la fonction est lipschitzienne ²⁾, donc admet une dérivée presque

²⁾ En vertu de l'inégalité $\omega(n\delta) \leq n\omega(\delta)$, valable pour tout $\delta > 0$ et tout entier naturel n .

partout. Nous devons donc supposer, pour construire notre exemple, que $\lim_{h \rightarrow \infty} h^{-1} \chi(h) = \infty$. Moyennant cette hypothèse, la construction est possible.

Considérons en effet

$$g(x) = \sum_{v=1}^{\infty} 2^{-k_v} \varphi(2^{k_v} x) \quad (5)$$

où k_v est une suite d'entiers croissants à déterminer. Le raisonnement de M. de Rham montre que g n'est dérivable en aucun point.

D'autre part

$$|g(x+h) - g(x)| < v h + 2 \cdot 2^{-k_v+1} \text{ pour tout } v.$$

Soit $\omega(h)$ le module de continuité de g ; pour $2^{-k_v+1} \leq h < 2^{-k_v}$, on a $\omega(h) < (v+2)h$.

Quitte à diminuer $\chi(h)$, on peut supposer $h^{-1} \chi(h) \uparrow \infty$ et $\chi(h) \downarrow 0$ quand $h \downarrow 0$. Il suffit alors de choisir $\{k_v\}$ de sorte que $v+2 < 2^{k_v} \chi(2^{-k_v})$ pour avoir $\omega(h) < \chi(h)$ pour tout $h > 0$.

Ainsi, dans toute classe de fonctions, définie par une majoration des modules de continuité, et contenant des fonctions non lipschitziennes, il existe des fonctions n'admettant de dérivées en aucun point.

3. EXEMPLE D'UNE FONCTION CONTINUE, DONT LE MODULE DE CONTINUITÉ EN CHAQUE POINT EST MINORÉ PAR UNE FONCTION DONNÉE.

Soit $h > 0$, $\psi(h)$ une fonction positive tendant vers zéro quand $h \downarrow 0$. Nous allons construire une fonction continue dont le module de continuité $\omega_x(h)$ satisfait en chaque point x

$$\omega_x(h) > \psi(h) \quad (6)$$

quitte à majorer $\psi(h)$, on peut supposer ψ croissante.

Considérons

$$g_1(x) = \sum_{v=1}^{\infty} p_v 2^{-k_v} \varphi(2^{k_v} x) \quad (7)$$

où $\{k_v\}$ et $\{p_v\}$ sont des suites croissantes de nombres positifs, à déterminer. Vu la croissance de ψ , (6) est satisfaite dès que, pour tout v ,

$$\omega_x(2^{-k_v}) > \psi(2^{-k_{v-1}}) = \varepsilon_v. \quad (8)$$

Or un calcul immédiat donne

$$\omega_x(2^{-k_v}) > 2^{-k_v} \left(\frac{1}{4} p_v - p_{v-1} - p_{v-2} \dots - p_1 \right) - \sum_{v+1}^{\infty} p_j 2^{-k_j}.$$

Donc (8) est vérifiée dès que, pour chaque j , on a

$$p_j > 13 p_{j-1}$$

$$\left(\text{ce qui entraîne } p_{v-1} + p_{v-2} + \dots p_1 < \frac{1}{12} p_v \right)$$

$$p_{j+1} 2^{-k_{j+1}} < \frac{1}{13} p_j 2^{-k_j}$$

$$\left(\text{ce qui entraîne } \sum_{v+1}^{\infty} p_j 2^{-k_j} < \frac{1}{12} p_v 2^{-k_v} \right)$$

$$p_j 2^{-k_j} \geq 12 \varepsilon_j$$

Pour cela, il suffit de choisir k_j de sorte que 1° $\varepsilon_{j+1} < \frac{1}{13} \varepsilon_j$; 2° $2^{k_j} \varepsilon_j > 13 2^{k_{j-1}} \varepsilon_{j-1}$ (ces inégalités permettent le choix de k_j , une fois fixés k_{j-1} et k_{j-2}), puis, de choisir $p_j = 12 \cdot 2^{k_j} \varepsilon_j$.

Le lecteur aura remarqué que dans ce § 3 la fonction φ pourrait être remplacée par n'importe quelle fonction périodique lipschitzienne, non constante. En fait, les considérations du § 3 se rattachent autant à l'exemple classique de Weierstrass qu'à celui de M. de Rham, au contraire de celles du § 2.