Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 5 (1959)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES COURBES LIMITES DE POLYGONES OBTENUS PAR TRISECTION

Autor: de Rham, Georges

Kapitel: § 3. Equations fonctionnelles.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-35472

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

§ 3. Equations fonctionnelles.

Considérons la transformation linéaire F_0 du plan en lui-même qui change S_i^0 en S_i^1 $(i = 0, 1, 2)$. Elle change S_h^n en S_h^{n+1} $(h = 0, 1, \ldots, 2^n)$, comme on le vérifie immédiatement par récurrence. Par suite, elle change $M(h2^{-n})$ en $M(h2^{-n-1})$ et l'on en déduit, par continuité, pour $0 \leqslant t \leqslant 1$,

$$F_0 M(t) = M\left(\frac{t}{2}\right).$$

D'une manière analogue, si F_1 est la transformation linéaire du plan en lui-même qui change S_i^0 en S_{i+1}^0 $(i = 0, 1, 2)$, on voit que

$$F_1 M(t) = M\left(\frac{1+t}{2}\right).$$

Il est facile de calculer les coordonnées (x_a, y_a) de l'image du point (x, y) par la transformation F_a $(a = 0, 1)$, ainsi que le coefficient angulaire m_a de l'image d'une droite de coefficient angulaire m; on trouve:

$$\left\{\begin{aligned} x_0 &= \alpha x + \beta_1 y\,, \\ y_0 &= \beta_1 y\,, \\ m_0 &= \frac{\gamma_1 m}{1 + \gamma_1 m}\,, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= \beta_2 x + 1 - \beta_2\,, \\ y_1 &= \beta_2 x + \alpha y + \beta_1\,, \\ m_1 &= \frac{\gamma_2 + m}{\gamma_2}. \end{aligned}\right.$$

On a, par suite, les équations fonctionnelles

$$\left.\begin{aligned} x\left(\frac{t}{2}\right) &= \alpha x(t) + \beta_1 y(t) & \qquad x\left(\frac{1+t}{2}\right) &= \beta_2 x(t) + 1 - \beta_2 \\ y\left(\frac{t}{2}\right) &= \beta_1 y(t) & \qquad y\left(\frac{1+t}{2}\right) &= \beta_2 x(t) + \alpha y(t) + \beta_1 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

ainsi que

$$m\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{\gamma_1 m(t)}{1 + \gamma_1 m(t)}\,, \qquad m\left(\frac{1+t}{2}\right) = \frac{\gamma_2 + m(t)}{\gamma_2}.$$

J'ai établi et utilisé ces équations fonctionnelles, pour le cas où $\gamma_1 = \gamma_2$, dans l'article de 1956 cité plus haut. Considérons ici le cas particulier où

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 1 \left(\text{et } \alpha = \frac{1}{2}\,, \quad \beta_1 = \frac{\gamma_1}{2}\,, \quad \beta_2 = \frac{\gamma_2}{2}\right).$$

Comme

$$\gamma_2 x'(t) + \gamma_1 y'(t) = 1 ,$$

on peut poser

$$\gamma_1 y'(t) = f(t) , \qquad \gamma_2 x'(t) = 1 - f(t).$$

Par substitution dans les relations dérivées de (13), il vient

$$f\left(\frac{t}{2}\right) = \gamma_1 f(t) , \qquad f\left(\frac{1+t}{2}\right) = \gamma_1 + (1 - \gamma_1) f(t) .$$

J'ai montré que $f(t)$ est la seule fonction bornée satisfaisant à ces équations, ce qui en fournit une définition très simple, et pour $\gamma_1 \neq \frac{1}{2}$ c'est une fonction singulière déjà étudiée par plusieurs auteurs (voir mon article de 1957 cité plus haut, où l'on trouvera aussi quelques indications bibliographiques).