

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 5 (1959)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES COURBES LIMITES DE POLYGONES OBTENUS PAR TRISECTION
Autor: de Rham, Georges
Kapitel: § 2. Démonstration des théorèmes.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-35472>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

IV. Si $\gamma_1 + \gamma_2 \neq 1$, la fonction $ax(t) + by(t)$, où a et b sont des constantes, n'a pour aucune valeur de t une dérivée non nulle.

Cela s'applique en particulier aux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ qui sont par suite des fonctions singulières. Mais il n'en est plus ainsi lorsque $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$.

V. Si $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$, les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont liées par la relation

$$\gamma_2 x(t) + \gamma_1 y(t) = t$$

et elles ont des dérivées premières continues

$$x'(t) = \frac{1}{\gamma_2 + \gamma_1 m(t)}, \quad y'(t) = \frac{m(t)}{\gamma_2 + \gamma_1 m(t)}.$$

En vertu de II, si $\gamma_1 = 1 - \gamma_2 \neq \frac{1}{2}$ ces dérivées $x'(t)$ et $y'(t)$ sont des fonctions singulières.

Le cas où $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$ est effectivement exceptionnel; alors $x = 2t - t^2$, $y = t^2$, $m = \frac{t}{1-t}$ et la courbe C est une parabole.

Dans un article antérieur*), j'ai établi I pour le cas où $\gamma_1 = \gamma_2$ et II, III et IV pour le cas où $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, en utilisant des équations fonctionnelles vérifiées par $M(t)$. Je traiterai ici le cas général par une méthode directe et plus simple. Ensuite, revenant sur les équations fonctionnelles, je montrerai que, dans le cas où $\gamma_1 = 1 - \gamma_2 \neq \frac{1}{2}$, les dérivées $x'(t)$ et $y'(t)$ se réduisent essentiellement à une fonction singulière très simple et connue.

§ 2. DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES.

Désignons par $Q_{n,h}$ la projection du côté $S_h^n S_{h+1}^n$ de P_n , faite parallèlement à une droite donnée quelconque sur une autre

*) « Sur une courbe plane », *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 39 (1956), pp. 25-42. Voir aussi sur le même sujet: « Un peu de mathématiques à propos d'une courbe plane », *Elemente der Mathematik*, 2 (1947), pp. 73-76 et 89-97; ainsi que: « Sur quelques courbes définies par des équations fonctionnelles », *Rendiconti del Seminario Matematico dell' Università e del Politecnico di Torino*, 16 (1957), pp. 101-113.

droite donnée. De la définition même de la trisection, on déduit

$$Q_{n+1,2h} = \alpha Q_{n,h}, \quad Q_{n+1,2h+1} = \beta_2 Q_{n,h} + \beta_1 Q_{n,h+1} \\ (h = 0, 1, \dots, 2^n). \quad (1)$$

Ces relations déterminent par récurrence les $Q_{n,h}$ à partir de $Q_{0,0}$ et $Q_{0,1}$.

Considérons le développement de t dans le système binaire

$$t = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 2^{-i} \quad (a_i = 0 \text{ ou } 1)$$

et la suite correspondante d'intervalles $i_n = (t_n, t_n + 2^{-n})$ avec

$$t_n = \sum_{i=1}^n a_i 2^{-i}.$$

On sait que si t n'est pas une fraction binaire, ce développement est unique, tandis que si t est une fraction binaire, il en existe deux; pour l'un, qu'on appellera le développement à droite, dès que n est assez grand $a_n = 0$ et $t = t_n$, de sorte que i_n est à droite de t ; pour l'autre, qu'on appellera le développement à gauche, dès que n est assez grand, $a_n = 1$ et $t = t_n + 2^{-n}$, de sorte que i_n est à gauche de t .

Soient (A_n, B_n) et (C_n, D_n) les projections sur les axes des côtés de P_n qui contiennent respectivement les points $M(t_n)$ et $M(t_n + 2^{-n})$. Si l'on désigne par $A_{n,h}$ la projection sur Ox de $S_h^n S_{h+1}^n$, pour $h = 2^n t_n$ on a $A_n = A_{n,h}$ et $C_n = A_{n,h+1}$. Ensuite, si $a_{n+1} = 0$, on aura $A_{n+1} = A_{n+1,2h}$, $C_{n+1} = A_{n+1,2h+1}$ tandis que si $a_{n+1} = 1$ on a $A_{n+1} = A_{n+1,2h+1}$, $C_{n+1} = A_{n+1,2h+2}$. Comme les $A_{n,h}$ satisfont aux mêmes relations (1) que les $Q_{n,h}$, cela entraîne

$$\left. \begin{aligned} A_{n+1} &= \alpha A_n \quad \text{et} \quad C_{n+1} = \beta_2 A_n + \beta_1 C_n \quad \text{si} \quad a_{n+1} = 0, \\ A_{n+1} &= \beta_2 A_n + \beta_1 C_n \quad \text{et} \quad C_{n+1} = \alpha C_n \quad \text{si} \quad a_{n+1} = 1. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

On a des relations tout à fait analogues entre les B_n et les D_n ,

$$\left. \begin{aligned} B_{n+1} &= \alpha B_n \quad \text{et} \quad D_{n+1} = \beta_2 B_n + \beta_1 C_n \quad \text{si} \quad a_{n+1} = 0, \\ B_{n+1} &= \beta_2 B_n + \beta_1 D_n \quad \text{et} \quad D_{n+1} = \alpha C_n \quad \text{si} \quad a_{n+1} = 1. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Posons

$$X_n = \frac{C_n}{A_n}.$$

Il résulte de (2) que

$$X_{n+1} = \begin{cases} \gamma_1 X_n + \gamma_2 & \text{si } a_{n+1} = 0, \\ \frac{X_n}{\gamma_1 X_n + \gamma_2} & \text{si } a_{n+1} = 1. \end{cases} \quad (4)$$

Pour établir nos théorèmes, nous aurons besoin de quelques propriétés de ces suites X_n .

Comme $A_0 = \frac{1}{\gamma_2}$ et $C_0 = 0$, on a $X_0 = 0$. Par suite, si $a_1 = \dots = a_{p-1} = 1$ et $a_p = 0$, on a $X_1 = \dots = X_{p-1} = 0$ et $X_p = \gamma_2$. Le premier terme non nul de la suite X_n vaut γ_2 et correspond au premier terme nul de la suite a_n ; les suivants sont tous > 0 . Pour $t = 1$, et seulement dans ce cas, tous les X_n sont nuls.

Si $a_n = 0$ pour $n \geq p$, en résolvant l'équation de récurrence fournie par la première relation (4), on obtient (pour $n \geq p$)

$$X_n = \begin{cases} K \gamma_1^n + \frac{\gamma_2}{1 - \gamma_1} & \text{si } \gamma_1 \neq 1, \\ \gamma_2 n + K' & \text{si } \gamma_1 = 1, \end{cases} \quad (5)$$

où K et K' sont indépendants de n .

Si $a_n = 1$ pour $n \geq p$, en considérant la seconde relation (4) qui peut s'écrire $X_{n+1}^{-1} = \gamma_2 X_n^{-1} + \gamma_2$, on obtient (pour $n \geq p$)

$$X_n^{-1} = \begin{cases} K \gamma_2^n + \frac{\gamma_1}{1 - \gamma_2} & \text{si } \gamma_2 \neq 1, \\ \gamma_1 n + K' & \text{si } \gamma_2 = 1. \end{cases} \quad (6)$$

LEMME. — Si t n'est pas une fraction binaire et si la suite X_n converge, sa limite est 1 et l'on a $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$.

Pour la suite correspondant au développement à droite d'une fraction binaire, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \frac{\gamma_2}{1 - \gamma_1} \quad \text{si } \gamma_1 < 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty \quad \text{si } \gamma_1 \geq 1.$$

Pour la suite correspondant au développement à gauche d'une fraction binaire < 1 , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \frac{1 - \gamma_2}{\gamma_1} \quad \text{si} \quad \gamma_2 < 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0 \quad \text{si} \quad \gamma_2 \geq 1 .$$

Si les deux suites X_n correspondant aux développements à droite et à gauche d'une fraction binaire convergent vers la même limite, on a $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ et cette limite est 1.

Pour établir la première assertion, il suffit de remarquer que si t n'est pas une fraction binaire, chacune des deux relations (4) est vérifiée pour une infinité de valeurs de n , de sorte que si $\lim X_n = \lambda$, on a $\lambda = \gamma_1 \lambda + \gamma_2$ et $1 = \gamma_1 \lambda + \gamma_2$, d'où $\lambda = 1$ et $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$.

La seconde et la troisième assertions résultent des formules (5) et (6) et la dernière en découle immédiatement.

Pour établir la première partie de I, il suffit de montrer que l'accroissement $\Delta_n m = m(t_n + 2^{-n}) - m(t_n)$ de $m(t)$ dans l'intervalle i_n tend vers zéro pour $n \rightarrow \infty$ lorsque t n'est pas une fraction binaire.

En vertu de la définition même de $m(t)$, on a

$$m(t_n) = \frac{B_n}{A_n}, \quad m(t_n + 2^{-n}) = \frac{D_n}{C_n} \quad \text{d'où} \quad \Delta_n m = \frac{A_n D_n - B_n C_n}{A_n C_n}.$$

De (2) et (3) on tire alors

$$\frac{\Delta_{k+1} m}{\Delta_k m} = \begin{cases} \frac{\gamma_1 X_k}{\gamma_1 X_k + \gamma_2} & \text{si } a_{k+1} = 0, \\ \frac{\gamma_2}{\gamma_1 X_k + \gamma_2} & \text{si } a_{k+1} = 1, \end{cases} \quad (7)$$

d'où encore, en vertu de (4),

$$\frac{\Delta_{k+1} m}{\Delta_k m} = \begin{cases} \gamma_1 \frac{X_k}{X_{k+1}} & \text{si } a_{k+1} = 0, \\ \gamma_2 \frac{X_{k+1}}{X_k} & \text{si } a_{k+1} = 1. \end{cases} \quad (8)$$

Choisissons p tel que $t_p + 2^{-p} < 1$. Alors $\Delta_p m$ est fini (ce ne serait pas le cas si $t_p + 2^{-p} = 1$ car $m(1) = \infty$) et l'on peut écrire, pour $n > p$,

$$\Delta_n m = \Delta_p m \prod_{k=p}^{n-1} \frac{\Delta_{k+1} m}{\Delta_k m}. \quad (9)$$

Les facteurs de ce produit sont tous < 1 , en vertu de (7). Si $a_k = 0$, on a, d'après (4), $X_k = \gamma_1 X_{k-1} + \gamma_2 > \gamma_2$ et si de plus $a_{k+1} = 1$, en vertu de (7),

$$\frac{\Delta_{k+1} m}{\Delta_k m} < \frac{1}{1 + \gamma_1}.$$

On majore donc le produit figurant au second membre de (9) en remplaçant

$$\frac{\Delta_{k+1} m}{\Delta_k m} \quad \text{par} \quad \frac{1}{1 + \gamma_1}$$

si $a_k = 0$ et $a_{k+1} = 1$, et par 1 dans tous les autres cas. Par suite, si N est le nombre d'entiers k tels que $p \leq k < n$ et $a_k = 0$ et $a_{k+1} = 1$, on a

$$\Delta_n m < \Delta_p m \left(\frac{1}{1 + \gamma_1} \right)^N.$$

Comme t n'est pas une fraction binaire, $N \rightarrow \infty$ et par suite $\Delta_n m \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow \infty$.

Pour établir la seconde partie de I, supposons que t soit une fraction binaire < 1 et considérons son développement à droite. Soit p tel que $a_k = 0$ pour $k \geq p$. On tire de (9) et (8):

$$\Delta_n m = \Delta_p m \gamma_1^{n-p} \frac{X_p}{X_n}.$$

Il résulte alors de (5) que, pour $n \rightarrow \infty$, $\Delta_n m$ tend vers zéro si $\gamma_1 \leq 1$ et vers une limite > 0 si $\gamma_1 > 1$. Comme

$$m(t+0) - m(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n m,$$

la seconde assertion de I est établie. La dernière assertion, concernant la continuité à gauche, s'obtient de la même manière.

Pour démontrer les théorèmes suivants, nous ferons constamment usage de la remarque que *si une fonction a une dérivée en un point, sa pente moyenne dans un intervalle contenant ce point tend vers la dérivée lorsque la longueur de cet intervalle tend vers zéro.*

Ainsi la pente moyenne de $m(t)$ dans i_k étant $2^k \Delta_k m$, si $m'(t)$ existe, on a

$$m'(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} 2^k \Delta_k m.$$

Si, de plus, $m'(t) \neq 0$, on aura

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{k+1} m}{\Delta_k m} = \frac{1}{2}.$$

Mais, en vertu de (7), cela est équivalent à $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$, et le lemme montre qu'alors $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$, ce qui établit II.

De la même manière, on voit que si la fonction $m(x)$ a une dérivée non nulle au point $x = m(t)$, on aura

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{k+1} m}{\Delta_k m} : \frac{\Delta_{k+1} x}{\Delta_k x} = 1. \quad (10)$$

Or $\Delta_k x$ est la projection sur Ox du vecteur joignant $M(t_k)$ à $M(t_k + 2^{-k})$ et vaut

$$\Delta_k x = \frac{\gamma_2 A_k + \gamma_1 C_k}{\gamma_1 + \gamma_2}. \quad (11)$$

En tenant compte de (2), on obtient

$$\frac{\Delta_{k+1} x}{\Delta_k x} = \begin{cases} \alpha \frac{\gamma_1^2 X_k + \gamma_1 \gamma_2 + \gamma_2}{\gamma_1 X_k + \gamma_2} & \text{si } a_{k+1} = 0, \\ \alpha \frac{\gamma_1 (1 + \gamma_2) X_k + \gamma_2^2}{\gamma_1 X_k + \gamma_2} & \text{si } a_{k+1} = 1. \end{cases} \quad (12)$$

Remarquons en passant que la somme des deux expressions aux seconds membres de (12) est identique à 1, en vertu de $\alpha(1 + \gamma_1 + \gamma_2) = 1$; en accord avec le fait que la somme des valeurs correspondantes de $\Delta_{k+1} x$ est égale à $\Delta_k x$.

En utilisant (7) et (12), il vient

$$\frac{\Delta_{k+1} m}{\Delta_k m} : \frac{\Delta_{k+1} x}{\Delta_k x} = \begin{cases} \frac{\gamma_1 X_k}{\alpha (\gamma_1^2 X_k + \gamma_1 \gamma_2 + \gamma_2)} & \text{si } a_{k+1} = 0, \\ \frac{\gamma_2}{\alpha [\gamma_1 (1 + \gamma_2) X_k + \gamma_2^2]} & \text{si } a_{k+1} = 1; \end{cases}$$

d'où l'on déduit que (10) est équivalent à

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = \frac{\gamma_2 (1 + \gamma_1)}{\gamma_1 (1 + \gamma_2)}$$

et le lemme montre qu'alors $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$, ce qui établit III.

Enfin, si $x(t)$ a une dérivée $x'(t) \neq 0$, on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{k+1} x}{\Delta_k x} = \frac{1}{2}$$

ce qui d'après (12) est équivalent à

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = \frac{\gamma_2 (1 + \gamma_1 - \gamma_2)}{\gamma_1 (1 + \gamma_2 - \gamma_1)}$$

et le lemme montre qu'alors $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$, ce qui établit IV pour ce qui concerne $x(t)$.

La même méthode s'applique à la fonction

$$z(t) = ax(t) + by(t).$$

On peut supposer que les constantes a et b ne sont pas toutes deux nulles. L'accroissement de $z = ax + by$ sur le côté $S_h^n S_{h+1}^n$ n'est pas autre chose que la projection $Q_{n,h}$ de ce côté, faite parallèlement à la droite $ax + by = 0$, sur une autre droite.

Les relations (1) montrent que le rapport $Z_n = \frac{Q_{n,h+1}}{Q_{n,h}}$ (où $h = 2^n t_n$) des projections des côtés de P_n contenant respectivement $M(t_n + 2^{-n})$ et $M(t_n)$ satisfait aux mêmes relations (4) que X_n . Par suite, le lemme s'applique à Z_n comme à X_n et le rapport $\frac{\Delta_{k+1} z}{\Delta_k z}$ des accroissements de z dans i_{k+1} et dans i_k est donné par la formule obtenue en remplaçant X_n par Z_n dans (12). Exactement comme ci-dessus pour $x(t)$, on en déduit que si $z(t)$

à une dérivée non nulle, on a $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$, ce qui achève la démonstration de IV.

Supposons maintenant que $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$. Alors

$$\beta_1 + \beta_2 = \alpha = \frac{1}{2},$$

et les relations (1) montrent que si $Q_{n,h} = 2^{-n}$ pour tout h , $Q_{n+1,h} = 2^{-n-1}$ pour tout h . Pour $z = \gamma_2 x + \gamma_1 y$, on a $Q_{0,0} = Q_{0,1} = 1$; on aura par suite $Q_{n,h} = 2^{-n}$ pour tout h et tout n . L'accroissement de $z = \gamma_2 x + \gamma_1 y$ sur tout côté de P_n étant ainsi égal à 2^{-n} , l'accroissement $\Delta_n z$ de

$$z(t) = \gamma_2 x(t) + \gamma_1 y(t)$$

dans i_n est toujours égal à 2^{-n} et l'on en déduit $z(t) = t$.

Cette relation $\gamma_2 x(t) + \gamma_1 y(t) = t$ montre que si l'une des dérivées $x'(t)$ ou $y'(t)$ existe, l'autre existe aussi et

$$\gamma_2 x'(t) + \gamma_1 y'(t) = 1.$$

Mais on a aussi $y'(t) = m(t) x'(t)$, d'où

$$x'(t) = \frac{1}{\gamma_2 + \gamma_1 m(t)}, \quad y'(t) = \frac{m(t)}{\gamma_2 + \gamma_1 m(t)}.$$

Pour achever la démonstration de V, il suffira dès lors de prouver que $x'(t)$ existe *partout*.

En raisonnant par récurrence, on déduit de (4) que $X_n < 1$, c'est-à-dire $A_{n,h} > A_{n,h+1}$. L'accroissement de $x(t)$ dans l'intervalle $(h2^{-n}, h2^{-n} + 2^{-n})$, étant égal à $\gamma_2 A_{n,h} + \gamma_1 A_{n,h+1}$, diminue donc lorsque h augmente. Par suite, n étant fixé, il est maximum pour $h = 0$. Autrement dit, k étant fixé, $\Delta_k x$ est maximum pour $t = 0$. Pour calculer sa valeur, remarquons que la première formule (12) peut s'écrire, en tenant compte de (4)

$$2 \frac{\Delta_{n+1} x}{\Delta_n x} = \frac{X_{n+2}}{X_{n+1}}.$$

On en déduit, pour $t = 0$,

$$2^k \Delta_k x = \frac{X_{k+1}}{X_1}.$$

D'autre part, pour $t = 0$, en vertu de (5),

$$X_n = 1 - \gamma_1^n,$$

d'où

$$2^k \Delta_k x = \frac{1 - \gamma_1^{k+1}}{1 - \gamma_1}.$$

Cette expression est le maximum de la pente moyenne de $x(t)$ dans les intervalles $(h2^{-k}, h2^{-k} + 2^{-k})$ pour $h = 0, 1, \dots, 2^k - 1$. Sa limite $\frac{1}{1 - \gamma_1} = \frac{1}{\gamma_2}$ pour $k \rightarrow \infty$ est alors la borne supérieure de la pente moyenne de $x(t)$ dans tous les intervalles contenus dans $(0, 1)$. Cette borne étant finie, la fonction $x(t)$ est absolument continue, et d'après un théorème bien connu, $x(t)$ est alors égale à l'intégrale de sa dérivée $x'(t)$ dont on sait qu'elle existe presque partout et qu'elle est égale (partout où elle existe) à la fonction $\frac{1}{\gamma_2 + \gamma_1 m(t)}$ qui, d'après I, est continue dans tout l'intervalle $(0, 1)$. Il en résulte que $x'(t)$ existe partout, ce qui achève la démonstration de V.

Si $\gamma_2 = 1 - \gamma_1 \neq \frac{1}{2}$, la fonction $m(t)$ n'ayant pour aucune valeur de t une dérivée non nulle, les fonctions $x'(t)$ et $y'(t)$ jouissent de la même propriété.

Supposons maintenant que $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$. Considérons la parabole tangente aux côtés $S_0^0 S_1^0$ et $S_1^0 S_2^0$ de P_0 en leurs points milieux $M(0)$ et $M(1)$. En vertu d'une propriété bien connue, S_1^1 et S_2^1 étant les points milieux des segments $M(0) S_1^0$ et $S_1^0 M(1)$, cette parabole est tangente au côté $S_1^1 S_2^1$ de P_1 en son point milieu $M(\frac{1}{2})$. Elle est ainsi tangente à chacun des côtés de P_1 en son point milieu. En raisonnant par récurrence, on voit pour la même raison qu'elle est tangente à chaque côté de P_n en son point milieu. Par suite, la courbe C est l'arc de cette parabole limité aux points $M(0)$ et $M(1)$. Son équation étant $(x + y)^2 - 4y = 0$, comme $x + y = 2t$, on a

$$y = t^2, \quad x = 2t - t^2 \quad \text{et} \quad m = \frac{t}{1 - t}.$$