**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 5 (1959)

**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES COURBES LIMITES DE POLYGONES OBTENUS PAR TRISECTION

**Autor:** de Rham, Georges

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-35472

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 14.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# SUR LES COURBES LIMITES DE POLYGONES OBTENUS PAR TRISECTION

par Georges DE RHAM (Lausanne)

*(Reçu le 25 octobre 1958)*

## § 1. DEFINITION. ENONCÉ DE THÉORÈMES.

Soit P une ligne polygonale à $n$ côtés, de sommets $S_0, S_1, \ldots, S_n$. Sur le côté $S_i S_{i+1}$, considérons les points $S'_{2i}$ et $S'_{2i+1}$ qui le divisent en trois segments $S_i S'_{2i}$, $S'_{2i} S'_{2i+1}$, $S'_{2i+1} S_{i+1}$ proportionnels à trois nombres positifs donnés $\beta_1$, $\alpha$, $\beta_2$ de somme 1,

$$\beta_1 + \alpha + \beta_2 = 1 .$$

Les points $S'_0, S'_1, \ldots, S'_{2n-1}$ sont les sommets d'une nouvelle ligne polygonale P′ à $2n - 1$ côtés.

Nous appelons *trisection* l'opération faisant passer de P à P′. Cette opération est complètement déterminée par la donnée des nombres

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{\alpha}, \qquad \gamma_2 = \frac{\beta_2}{\alpha}$$

que nous appellerons *les rapports de la trisection.* Ce sont deux nombres positifs qui peuvent être choisis arbitrairement.

Il est clair que le point M qui divise le côté $S_i S_{i+1}$ de P en deux segments $S_i M$ et $MS_{i+1}$ proportionnels à $\beta_1$ et $\beta_2$ divise aussi le côté $S'_{2i} S'_{2i+1}$ de P′ en deux segments proportionnels à $\beta_1$ et $\beta_2$ (fig. 1). Autre remarque évidente qui sera utile: si la longueur des côtés de P ne dépasse pas $l$, la longueur des côtés de P′ ne dépasse pas le plus grand des nombres $\alpha l$ et $(\beta_1 + \beta_2)\, l$.

Partons d'une ligne polygonale $P_0$ à deux côtés et répétons cette opération. On obtient une suite de lignes polygonales $P_n$ à $2^n + 1$ côtés ($n = 0, 1, 2, \ldots$), $P_{n+1}$ se déduisant de $P_n$ par une trisection de rapports donnés indépendants de $n$. Toutes ces lignes polygonales sont convexes et elles tendent vers une courbe limite C que nous nous proposons d'étudier.

Soient $S_i^n$ ($i = 0, 1, ..., 2^n + 1$) les sommets de $P_n$. D'après la première remarque ci-dessus, le point M qui divise le côté $S_h^n S_{h+1}^n$ de $P_n$ dans le rapport $\beta_1 : \beta_2$, divise dans le même rapport le côté $S_{2h}^{n+1} S_{2h+1}^{n+1}$ de $P_{n+1}$ et aussi d'une manière générale le côté $S_{2^k h}^{n+k} S_{2^k h+1}^{n+k}$ de $P_{n+k}$. Appartenant à tous les polygones $P_{n+k}$ ($k = 0, 1, 2, ...$), ce point appartient aussi à la courbe C

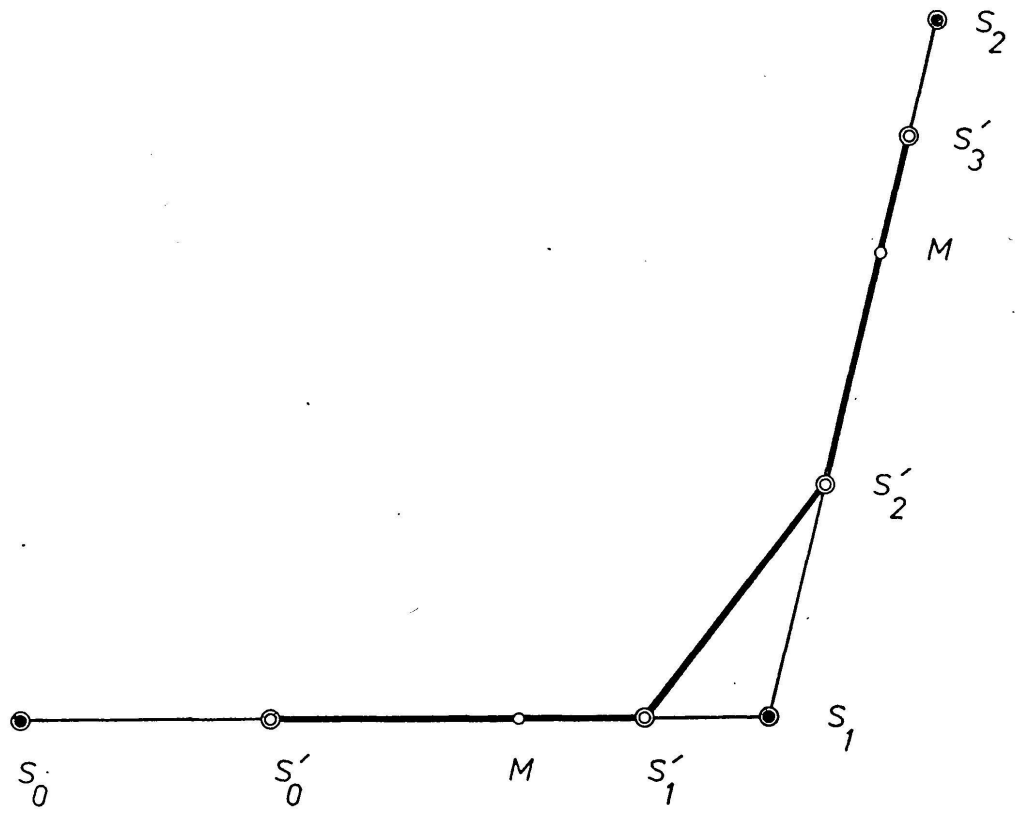


Fig. 1.

et comme il est bien déterminé par la fraction binaire $h2^{-n}$, nous le désignerons par $M(h2^{-n})$.

D'après la seconde remarque ci-dessus, si $l$ est le plus grand côté de $P_0$, la longueur des côtés de $P_n$ ne dépasse pas $l\rho^n$, où $\rho = \sup\{\beta_1 + \beta_2, \alpha\} < 1$, et il en est de même pour la distance des points $M(h2^{-n})$ et $M(h2^{-n} + 2^{-n})$. Cela entraîne que l'ensemble des points $M(h2^{-n})$ associés aux fractions binaires $h2^{-n}$ est dense sur la courbe C et que l'application $h2^{-n} \to M(h2^{-n})$ est uniformément continue et se prolonge par suite en une application continue $t \to M(t)$ de l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$ sur la courbe C, qui se trouve ainsi paramétrisée d'une manière naturelle.

Introduisons un système de coordonnées cartésiennes $Oxy$, tel que $M(0) = (0, 0)$, $M(1) = (1, 1)$ et $S_1^0 = (1, 0)$. Le pre-

mier côté de $P_0$ est alors sur $Ox$ et le second côté de $P_0$ sur la droite d'équation $x = 1$ (fig. 2). On désignera par $x(t)$ et $y(t)$ les coordonnées de $M(t)$. Ce sont des fonctions continues de $t$, qui croissent de 0 à 1 lorsque $t$ croît de 0 à 1.

Les polygones $P_n$ étant tous convexes, la courbe C est aussi convexe. Par suite, elle a en chaque point $M(t)$ une tangente à

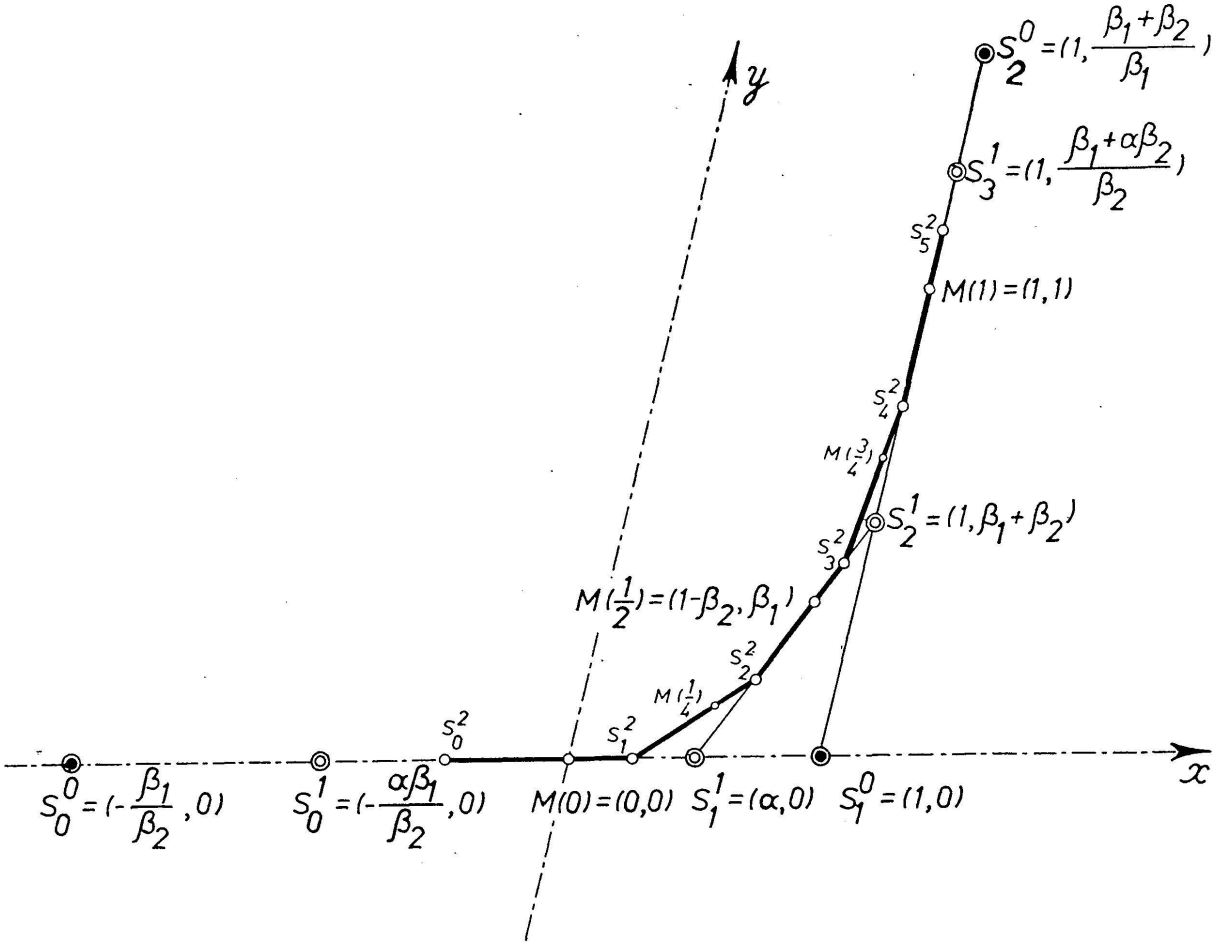


Fig. 2.

droite et une tangente à gauche, et sauf éventuellement aux points d'un ensemble au plus dénombrable, ces deux tangentes coïncident en une tangente unique. Nous désignerons le coefficient angulaire de cette tangente par $m(t)$. C'est une fonction croissante de $t$, parce que C est convexe. Aux points anguleux correspondent des discontinuités de première espèce de $m(t)$, les coefficients angulaires des tangentes à droite et à gauche étant $m(t+0)$ et $m(t-0)$. Si $t = h2^{-n}$ est une fraction binaire, le côté de $P_n$ qui contient $M(h2^{-n})$, ne traversant pas C, a un coefficient angulaire égal à $m(h2^{-n})$ si $M(h2^{-n})$ n'est pas un

point anguleux et compris entre $m(h2^{-n} - 0)$ et $m(h2^{-n} + 0)$ si $M(h2^{-n})$ est un point anguleux; dans ce dernier cas, *nous conviendrons de définir* $m(h2^{-n})$ *en le posant égal au coefficient angulaire du côté de* $P_n$ *qui contient* $M(h2^{-n})$. Le point $M(t)$ n'étant jamais un point anguleux si $t$ n'est pas une fraction binaire, comme on verra, il en résultera que $m(t)$ est univoquement définie dans tout l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$. On a $m(0) = 0$, $m(1) = \infty$ et pour $0 < t < 1$, $m(t)$ est fini $> 0$.

Dans cet article, je me propose d'établir quelques propriétés des fonctions $m(t)$, $m(x)$, $x(t)$ et $y(t)$, qui sont énoncées dans les théorèmes suivants.

I. *La fonction* m (t) *est continue pour toute valeur de* t *qui n'est pas une fraction binaire. Pour toute fraction binaire* t, $0 \leqslant t < 1$ *(resp.* $0 < t \leqslant 1$*), la fonction* m (t) *est continue ou discontinue à droite (resp. à gauche) selon que* $\gamma_1 \leqslant 1$ *ou* $\gamma_1 > 1$ *(resp.* $\gamma_2 \leqslant 1$ *ou* $\gamma_2 > 1$*).*

La première assertion entraîne que $m(t)$ est univoquement défini dans tout l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$, comme il a été dit. La seconde assertion montre que, si $\gamma_1 \leqslant 1$ et $\gamma_2 \leqslant 1$, la courbe C n'a pas de points anguleux, tandis que si $\gamma_1 > 1$ ou $\gamma_2 > 1$, elle a une infinité de points anguleux: tous les points $M(t)$ pour lesquels $t$ est une fraction binaire, $0 < t < 1$.

II. *Sauf dans le cas où* $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$, *la fonction* m (t) *n'a pour aucune valeur de* t *une dérivée non nulle.*

La dérivée de $m(t)$ est donc nulle partout où elle existe, et comme elle existe presque partout, d'après un théorème bien connu de Lebesgue, $m(t)$ est une fonction singulière. En considérant $m$ comme fonction de $x$, on a une fonction $m(x)$ qui jouit aussi de cette propriété.

III. *Sauf dans le cas ou* $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$, *la fonction* m (x) *n'a pour aucune valeur de* x *une dérivée non nulle.*

La fonction $m(x)$ est donc aussi une fonction singulière, ce qui signifie que *la courbure de* C *est presque partout nulle.*

IV. *Si* $\gamma_1 + \gamma_2 \neq 1$, *la fonction* ax (t) + by (t), *où* a *et* b *sont des constantes, n'a pour aucune valeur de* t *une dérivée non nulle.*

Cela s'applique en particulier aux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ qui sont par suite des fonctions singulières. Mais il n'en est plus ainsi lorsque $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$.

V. *Si* $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$, *les fonctions* x (t) et y (t) *sont liées par la relation*

$$\gamma_2 x(t) + \gamma_1 y(t) = t$$

*et elles ont des dérivées premières continues*

$$x'(t) = \frac{1}{\gamma_2 + \gamma_1 m(t)}, \qquad y'(t) = \frac{m(t)}{\gamma_2 + \gamma_1 m(t)}.$$

En vertu de II, si $\gamma_1 = 1 - \gamma_2 \neq \frac{1}{2}$ ces dérivées $x'(t)$ et $y'(t)$ sont des fonctions singulières.

Le cas où $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$ est effectivement exceptionnel; alors $x = 2t - t^2$, $y = t^2$, $m = \frac{t}{1-t}$ et la courbe C est une parabole.

Dans un article antérieur *), j'ai établi I pour le cas où $\gamma_1 = \gamma_2$ et II, III et IV pour le cas où $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, en utilisant des équations fonctionnelles vérifiées par M $(t)$. Je traiterai ici le cas général par une méthode directe et plus simple. Ensuite, revenant sur les équations fonctionnelles, je montrerai que, dans le cas où $\gamma_1 = 1 - \gamma_2 \neq \frac{1}{2}$, les dérivées $x'(t)$ et $y'(t)$ se réduisent essentiellement à une fonction singulière très simple et connue.

## § 2. Démonstration des théorèmes.

Désignons par $Q_{n,h}$ la projection du côté $S_h^n S_{h+1}^n$ de $P_n$, faite parallèlement à une droite donnée quelconque sur une autre

*) « Sur une courbe plane », *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, *39* (1956), pp. 25-42. Voir aussi sur le même sujet: « Un peu de mathématiques à propos d'une courbe plane », *Elemente der Mathematik*, *2* (1947), pp. 73-76 et 89-97; ainsi que: « Sur quelques courbes définies par des équations fonctionnelles », *Rendiconti del Seminario Matematicà dell' Università e del Politecnico di Torino*, *16* (1957), pp. 101-113.

droite donnée. De la définition même de la trisection, on déduit

$$Q_{n+1,2h} = \alpha Q_{n,h}, \qquad Q_{n+1,2h+1} = \beta_2 Q_{n,h} + \beta_1 Q_{n,h+1}$$
$$(h = 0, 1, \ldots, 2^n) \cdot \qquad (1)$$

Ces relations déterminent par récurrence les $Q_{n,h}$ à partir de $Q_{0,0}$ et $Q_{0,1}$.

Considérons le développement de $t$ dans le système binaire

$$t = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 2^{-i} \quad (a_i = 0 \text{ ou } 1)$$

et la suite correspondante d'intervalles $i_n = (t_n, t_n + 2^{-n})$ avec

$$t_n = \sum_{i=1}^{n} a_i 2^{-i} .$$

On sait que si $t$ n'est pas une fraction binaire, ce développement est unique, tandis que si $t$ est une fraction binaire, il en existe deux; pour l'un, qu'on appellera le développement à droite, dès que $n$ est assez grand $a_n = 0$ et $t = t_n$, de sorte que $i_n$ est à droite de $t$; pour l'autre, qu'on appellera le développement à gauche, dès que $n$ est assez grand, $a_n = 1$ et $t = t_n + 2^{-n}$, de sorte que $i_n$ est à gauche de $t$.

Soient $(A_n, B_n)$ et $(C_n, D_n)$ les projections sur les axes des côtés de $P_n$ qui contiennent respectivement les points $M(t_n)$ et $M(t_n + 2^{-n})$. Si l'on désigne par $A_{n,h}$ la projection sur $Ox$ de $S_h^n S_{h+1}^n$, pour $h = 2^n t_n$ on a $A_n = A_{n,h}$ et $C_n = A_{n,h+1}$. Ensuite, si $a_{n+1} = 0$, on aura $A_{n+1} = A_{n+1,2h}$, $C_{n+1} = A_{n+1,2h+1}$ tandis que si $a_{n+1} = 0$ on a $A_{n+1} = A_{n+1,2h+1}$, $C_{n+1} = A_{n+1,2h+2}$. Comme les $A_{n,h}$ satisfont aux mêmes relations (1) que les $Q_{n,h}$, cela entraîne

$$\left.\begin{aligned} A_{n+1} &= \alpha A_n \quad \text{et} \quad C_{n+1} = \beta_2 A_n + \beta_1 C_n \quad \text{si} \quad a_{n+1} = 0 , \\ A_{n+1} &= \beta_2 A_n + \beta_1 C_n \quad \text{et} \quad C_{n+1} = \alpha C_n \quad \text{si} \quad a_{n+1} = 1 . \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

On a des relations tout à fait analogues entre les $B_n$ et les $D_n$,

$$\left.\begin{aligned} B_{n+1} &= \alpha B_n \quad \text{et} \quad D_{n+1} = \beta_2 B_n + \beta_1 C_n \quad \text{si} \quad a_{n+1} = 0 , \\ B_{n+1} &= \beta_2 B_n + \beta_1 D_n \quad \text{et} \quad D_{n+1} = \alpha C_n \quad \text{si} \quad a_{n+1} = 1 . \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Posons

$$X_n = \frac{C_n}{A_n}.$$

Il résulte de (2) que

$$X_{n+1} = \begin{cases} \gamma_1 X_n + \gamma_2 & \text{si} \quad a_{n+1} = 0, \\ \dfrac{X_n}{\gamma_1 X_n + \gamma_2} & \text{si} \quad a_{n+1} = 1. \end{cases} \tag{4}$$

Pour établir nos théorèmes, nous aurons besoin de quelques propriétés de ces suites $X_n$.

Comme $A_0 = \frac{1}{\gamma_2}$ et $C_0 = 0$, on a $X_0 = 0$. Par suite, si $a_1 = \ldots = a_{p-1} = 1$ et $a_p = 0$, on a $X_1 = \ldots = X_{p-1} = 0$ et $X_p = \gamma_2$. Le premier terme non nul de la suite $X_n$ vaut $\gamma_2$ et correspond au premier terme nul de la suite $a_n$; les suivants sont tous $> 0$. Pour $t = 1$, et seulement dans ce cas, tous les $X_n$ sont nuls.

Si $a_n = 0$ pour $n \geqslant p$, en résolvant l'équation de récurrence fournie par la première relation (4), on obtient (pour $n \geqslant p$)

$$X_n = \begin{cases} K\gamma_1^n + \dfrac{\gamma_2}{1-\gamma_1} & \text{si} \quad \gamma_1 \neq 1, \\ \gamma_2 n + K' & \text{si} \quad \gamma_1 = 1, \end{cases} \tag{5}$$

où K et K′ sont indépendants de $n$.

Si $a_n = 1$ pour $n \geqslant p$, en considérant la seconde relation (4) qui peut s'écrire $X_{n+1}^{-1} = \gamma_2 X_n^{-1} + \gamma_2$, on obtient (pour $n \geqslant p$)

$$X_n^{-1} = \begin{cases} K\gamma_2^n + \dfrac{\gamma_1}{1-\gamma_2} & \text{si} \quad \gamma_2 \neq 1, \\ \gamma_1 n + K' & \text{si} \quad \gamma_2 = 1. \end{cases} \tag{6}$$

Lemme. — *Si* t *n'est pas une fraction binaire et si la suite* $X_n$ *converge, sa limite est 1 et l'on a* $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$.

*Pour la suite correspondant au développement à droite d'une fraction binaire, on a*

$$\lim_{n=\infty} X_n = \frac{\gamma_2}{1-\gamma_1} \quad si \quad \gamma_1 < 1 \quad et \quad \lim X_n = \infty \quad si \quad \gamma_1 \geqslant 1.$$

*Pour la suite correspondant au développement à gauche d'une fraction binaire* $< 1$, *on a*

$$\lim_{n=\infty} X_n = \frac{1-\gamma_2}{\gamma_1} \quad si \quad \gamma_2 < 1 \quad et \quad \lim_{n=\infty} X_n = 0 \quad si \quad \gamma_2 \geqslant 1 \ .$$

*Si les deux suites* $X_n$ *correspondant aux développements à droite et à gauche d'une fraction binaire convergent vers la même limite, on a* $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ *et cette limite est 1.*

Pour établir la première assertion, il suffit de remarquer que si $t$ n'est pas une fraction binaire, chacune des deux relations (4) est vérifiée pour une infinité de valeurs de $n$, de sorte que si $\lim X_n = \lambda$, on a $\lambda = \gamma_1 \lambda + \gamma_2$ et $1 = \gamma_1 \lambda + \gamma_2$, d'où $\lambda = 1$ et $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$.

La seconde et la troisième assertions résultent des formules (5) et (6) et la dernière en découle immédiatement.

Pour établir la première partie de I, il suffit de montrer que l'accroissement $\Delta_n m = m(t_n + 2^{-n}) - m(t_n)$ de $m(t)$ dans l'intervalle $i_n$ tend vers zéro pour $n \to \infty$ lorsque $t$ n'est pas une fraction binaire.

En vertu de la définition même de $m(t)$, on a

$$m(t_n) = \frac{B_n}{A_n}, \quad m(t_n + 2^{-n}) = \frac{D_n}{C_n} \quad \text{d'où} \quad \Delta_n m = \frac{A_n D_n - B_n C_n}{A_n C_n}.$$

De (2) et (3) on tire alors

$$\frac{\Delta_{k+1} m}{\Delta_k m} = \begin{cases} \dfrac{\gamma_1 X_k}{\gamma_1 X_k + \gamma_2} & \text{si} \quad a_{k+1} = 0 \ , \\[2ex] \dfrac{\gamma_2}{\gamma_1 X_k + \gamma_2} & \text{si} \quad a_{k+1} = 1 \ , \end{cases} \qquad (7)$$

d'où encore, en vertu de (4),

$$\frac{\Delta_{k+1} m}{\Delta_k m} = \begin{cases} \gamma_1 \dfrac{X_k}{X_{k+1}} & \text{si} \quad a_{k+1} = 0 \ , \\[2ex] \gamma_2 \dfrac{X_{k+1}}{X_k} & \text{si} \quad a_{k+1} = 1 \ . \end{cases} \qquad (8)$$

Choisissons $p$ tel que $t_p + 2^{-p} < 1$. Alors $\Delta_p m$ est fini (ce ne serait pas le cas si $t_p + 2^{-p} = 1$ car $m(1) = \infty$) et l'on peut écrire, pour $n > p$,

$$\Delta_n m = \Delta_p m \prod_{k=p}^{n-1} \frac{\Delta_{k+1} m}{\Delta_k m} \cdot \tag{9}$$

Les facteurs de ce produit sont tous $< 1$, en vertu de (7). Si $a_k = 0$, on a, d'après (4), $X_k = \gamma_1 X_{k-1} + \gamma_2 > \gamma_2$ et si de plus $a_{k+1} = 1$, en vertu de (7),

$$\frac{\Delta_{k+1} m}{\Delta_k m} < \frac{1}{1 + \gamma_1} \cdot$$

On majore donc le produit figurant au second membre de (9) en remplaçant

$$\frac{\Delta_{k+1} m}{\Delta_k m} \quad \text{par} \quad \frac{1}{1 + \gamma_1}$$

si $a_k = 0$ et $a_{k+1} = 1$, et par 1 dans tous les autres cas. Par suite, si N est le nombre d'entiers $k$ tels que $p \leqslant k < n$ et $a_k = 0$ et $a_{k+1} = 1$, on a

$$\Delta_n m < \Delta_p m \left(\frac{1}{1 + \gamma_1}\right)^{N} \cdot$$

Comme $t$ n'est pas une fraction binaire, $N \to \infty$ et par suite $\Delta_n m \to 0$ pour $n \to \infty$.

Pour établir la seconde partie de I, supposons que $t$ soit une fraction binaire $< 1$ et considérons son développement à droite. Soit $p$ tel que $a_k = 0$ pour $k \geqslant p$. On tire de (9) et (8):

$$\Delta_n m = \Delta_p m \, \gamma_1^{n-p} \frac{X_p}{X_n} \cdot$$

Il résulte alors de (5) que, pour $n \to \infty$, $\Delta_n m$ tend vers zéro si $\gamma_1 \leqslant 1$ et vers une limite $> 0$ si $\gamma_1 > 1$. Comme

$$m(t + 0) - m(t) = \lim_{n=\infty} \Delta_n m \ ,$$

la seconde assertion de I est établie. La dernière assertion, concernant la continuité à gauche, s'obtient de la même manière.

Pour démontrer les théorèmes suivants, nous ferons constamment usage de la remarque que *si une fonction a une dérivée en un point, sa pente moyenne dans un intervalle contenant ce point tend vers la dérivée lorsque la longueur de cet intervalle tend vers zéro.*

Ainsi la pente moyenne de $m(t)$ dans $i_k$ étant $2^k \Delta_k m$, si $m'(t)$ existe, on a

$$m'(t) = \lim_{k=\infty} 2^k \Delta_k m .$$

Si, de plus, $m'(t) \neq 0$, on aura

$$\lim_{k=\infty} \frac{\Delta_{k+1} m}{\Delta_k m} = \frac{1}{2} .$$

Mais, en vertu de (7), cela est équivalent à $\lim\limits_{k=\infty} X_k = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$, et le lemme montre qu'alors $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$, ce qui établit II.

De la même manière, on voit que si la fonction $m(x)$ a une dérivée non nulle au point $x = m(t)$, on aura

$$\lim_{k=\infty} \frac{\Delta_{k+1} m}{\Delta_k m} : \frac{\Delta_{k+1} x}{\Delta_k x} = 1 . \tag{10}$$

Or $\Delta_k x$ est la projection sur $Ox$ du vecteur joignant $M(t_k)$ à $M(t_k + 2^{-k})$ et vaut

$$\Delta_k x = \frac{\gamma_2 A_k + \gamma_1 C_k}{\gamma_1 + \gamma_2} . \tag{11}$$

En tenant compte de (2), on obtient

$$\frac{\Delta_{k+1} x}{\Delta_k x} = \begin{cases} \alpha \dfrac{\gamma_1^2 X_k + \gamma_1 \gamma_2 + \gamma_2}{\gamma_1 X_k + \gamma_2} & \text{si} \quad a_{k+1} = 0 , \\[2ex] \alpha \dfrac{\gamma_1 (1 + \gamma_2) X_k + \gamma_2^2}{\gamma_1 X_k + \gamma_2} & \text{si} \quad a_{k+1} = 1 . \end{cases} \tag{12}$$

Remarquons en passant que la somme des deux expressions aux seconds membres de (12) est identique à 1, en vertu de $\alpha(1 + \gamma_1 + \gamma_2) = 1$; en accord avec le fait que la somme des valeurs correspondantes de $\Delta_{k+1} x$ est égale à $\Delta_k x$.

En utilisant (7) et (12), il vient

$$\frac{\Delta_{k+1} m}{\Delta_k m} : \frac{\Delta_{k+1} x}{\Delta_k x} = \begin{cases} \dfrac{\gamma_1 X_k}{\alpha\left(\gamma_1^2 X_k + \gamma_1 \gamma_2 + \gamma_2\right)} & \text{si} \quad a_{k+1} = 0 , \\[2ex] \dfrac{\gamma_2}{\alpha\left[\gamma_1 (1 + \gamma_2) X_k + \gamma_2^2\right]} & \text{si} \quad a_{k+1} = 1 ; \end{cases}$$

d'où l'on déduit que (10) est équivalent à

$$\lim_{k=\infty} X_k = \frac{\gamma_2 (1 + \gamma_1)}{\gamma_1 (1 + \gamma_2)}$$

et le lemme montre qu'alors $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$, ce qui établit III.

Enfin, si $x(t)$ a une dérivée $x'(t) \neq 0$, on a

$$\lim_{k=\infty} \frac{\Delta_{k+1} x}{\Delta_k x} = \frac{1}{2}$$

ce qui d'après (12) est équivalent à

$$\lim_{k=\infty} X_k = \frac{\gamma_2 (1 + \gamma_1 - \gamma_2)}{\gamma_1 (1 + \gamma_2 - \gamma_1)}$$

et le lemme montre qu'alors $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$, ce qui établit IV pour ce qui concerne $x(t)$.

La même méthode s'applique à la fonction

$$z(t) = a\,x(t) + b\,y(t) .$$

On peut supposer que les constantes $a$ et $b$ ne sont pas toutes deux nulles. L'accroissement de $z = ax + by$ sur le côté $S_h^n S_{h+1}^n$ n'est pas autre chose que la projection $Q_{n,h}$ de ce côté, faite parallèlement à la droite $ax + by = 0$, sur une autre droite. Les relations (1) montrent que le rapport $Z_n = \frac{Q_{n,h+1}}{Q_{n,h}}$ (où $h = 2^n t_n$) des projections des côtés de $P_n$ contenant respectivement $M(t_n + 2^{-n})$ et $M(t_n)$ satisfait aux mêmes relations (4) que $X_n$. Par suite, le lemme s'applique à $Z_n$ comme à $X_n$ et le rapport $\frac{\Delta_{k+1} z}{\Delta_k z}$ des accroissements de $z$ dans $i_{k+1}$ et dans $i_k$ est donné par la formule obtenue en remplaçant $X_n$ par $Z_n$ dans (12). Exactement comme ci-dessus pour $x(t)$, on en déduit que si $z(t)$

a une dérivée non nulle, on a $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$, ce qui achève la démonstration de IV.

Supposons maintenant que $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$. Alors

$$\beta_1 + \beta_2 = \alpha = \frac{1}{2},$$

et les relations (1) montrent que si $Q_{n,h} = 2^{-n}$ pour tout $h$, $Q_{n+1,h} = 2^{-n-1}$ pour tout $h$. Pour $z = \gamma_2 x + \gamma_1 y$, on a $Q_{0,0} = Q_{0,1} = 1$; on aura par suite $Q_{n,h} = 2^{-n}$ pour tout $h$ et tout $n$. L'accroissement de $z = \gamma_2 x + \gamma_1 y$ sur tout côté de $P_n$ étant ainsi égal à $2^{-n}$, l'accroissement $\Delta_n z$ de

$$z(t) = \gamma_2 x(t) + \gamma_1 y(t)$$

dans $i_n$ est toujours égal à $2^{-n}$ et l'on en déduit $z(t) = t$.

Cette relation $\gamma_2 x(t) + \gamma_1 y(t) = t$ montre que si l'une des dérivées $x'(t)$ ou $y'(t)$ existe, l'autre existe aussi et

$$\gamma_2 x'(t) + \gamma_1 y'(t) = 1 .$$

Mais on a aussi $y'(t) = m(t)\, x'(t)$, d'où

$$x'(t) = \frac{1}{\gamma_2 + \gamma_1 m(t)}, \quad y'(t) = \frac{m(t)}{\gamma_2 + \gamma_1 m(t)}.$$

Pour achever la démonstration de V, il suffira dès lors de prouver que $x'(t)$ existe *partout*.

En raisonnant par récurrence, on déduit de (4) que $X_n < 1$, c'est-à-dire $A_{n,h} > A_{n,h+1}$. L'accroissement de $x(t)$ dans l'intervalle $(h2^{-n}, h2^{-n} + 2^{-n})$, étant égal à $\gamma_2 A_{n,h} + \gamma_1 A_{n,h+1}$, diminue donc lorsque $h$ augmente. Par suite, $n$ étant fixé, il est maximum pour $h = 0$. Autrement dit, $k$ étant fixé, $\Delta_k x$ est maximum pour $t = 0$. Pour calculer sa valeur, remarquons que la première formule (12) peut s'écrire, en tenant compte de (4)

$$2\frac{\Delta_{n+1} x}{\Delta_n x} = \frac{X_{n+2}}{X_{n+1}}.$$

On en déduit, pour $t = 0$,

$$2^k \Delta_k x = \frac{X_{k+1}}{X_1}.$$

D'autre part, pour $t = 0$, en vertu de (5),

$$X_n = 1 - \gamma_1^n ,$$

d'où

$$2^k \Delta_k x = \frac{1 - \gamma_1^{k+1}}{1 - \gamma_1} .$$

Cette expression est le maximum de la pente moyenne de $x(t)$ dans les intervalles $(h2^{-k}, h2^{-k} + 2^{-k})$ pour $h = 0, 1, \ldots, 2^k - 1$. Sa limite $\frac{1}{1 - \gamma_1} = \frac{1}{\gamma_2}$ pour $k \to \infty$ est alors la borne supérieure de la pente moyenne de $x(t)$ dans tous les intervalles contenus dans $(0, 1)$. Cette borne étant finie, la fonction $x(t)$ est absolument continue, et d'après un théorème bien connu, $x(t)$ est alors égale à l'intégrale de sa dérivée $x'(t)$ dont on sait qu'elle existe presque partout et qu'elle est égale (partout où elle existe) à la fonction $\frac{1}{\gamma_2 + \gamma_1 m(t)}$ qui, d'après I, est continue dans tout l'intervalle $(0, 1)$. Il en résulte que $x'(t)$ existe partout, ce qui achève la démonstration de V.

Si $\gamma_2 = 1 - \gamma_1 \neq \frac{1}{2}$, la fonction $m(t)$ n'ayant pour aucune valeur de $t$ une dérivée non nulle, les fonctions $x'(t)$ et $y'(t)$ jouissent de la même propriété.

Supposons maintenant que $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$. Considérons la parabole tangente aux côtés $S_0^0 S_1^0$ et $S_1^0 S_2^0$ de $P_0$ en leurs points milieux $M(0)$ et $M(1)$. En vertu d'une propriété bien connue, $S_1^1$ et $S_2^1$ étant les points milieux des segments $M(0) S_1^0$ et $S_1^0 M(1)$, cette parabole est tangente au côté $S_1^1 S_2^1$ de $P_1$ en son point milieu $M\left(\frac{1}{2}\right)$. Elle est ainsi tangente à chacun des côtés de $P_1$ en son point milieu. En raisonnant par récurrence, on voit pour la même raison qu'elle est tangente à chaque côté de $P_n$ en son point milieu. Par suite, la courbe C est l'arc de cette parabole limité aux points $M(0)$ et $M(1)$. Son équation étant $(x + y)^2 - 4y = 0$, comme $x + y = 2t$, on a

$$y = t^2 , \quad x = 2t - t^2 \quad \text{et} \quad m = \frac{t}{1 - t} .$$

## § 3. Equations fonctionnelles.

Considérons la transformation linéaire $F_0$ du plan en lui-même qui change $S_i^0$ en $S_i^1$ $(i = 0, 1, 2)$. Elle change $S_h^n$ en $S_h^{n+1}$ $(h = 0, 1, \ldots, 2^n)$, comme on le vérifie immédiatement par récurrence. Par suite, elle change $M(h2^{-n})$ en $M(h2^{-n-1})$ et l'on en déduit, par continuité, pour $0 \leqslant t \leqslant 1$,

$$F_0 M(t) = M\left(\frac{t}{2}\right).$$

D'une manière analogue, si $F_1$ est la transformation linéaire du plan en lui-même qui change $S_i^0$ en $S_{i+1}^0$ $(i = 0, 1, 2)$, on voit que

$$F_1 M(t) = M\left(\frac{1+t}{2}\right).$$

Il est facile de calculer les coordonnées $(x_a, y_a)$ de l'image du point $(x, y)$ par la transformation $F_a$ $(a = 0, 1)$, ainsi que le coefficient angulaire $m_a$ de l'image d'une droite de coefficient angulaire $m$; on trouve:

$$\begin{cases} x_0 = \alpha x + \beta_1 y, \\ y_0 = \beta_1 y, \\ m_0 = \dfrac{\gamma_1 m}{1 + \gamma_1 m}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \beta_2 x + 1 - \beta_2, \\ y_1 = \beta_2 x + \alpha y + \beta_1, \\ m_1 = \dfrac{\gamma_2 + m}{\gamma_2}. \end{cases}$$

On a, par suite, les équations fonctionnelles

$$\left.\begin{aligned} x\left(\frac{t}{2}\right) &= \alpha x(t) + \beta_1 y(t) & x\left(\frac{1+t}{2}\right) &= \beta_2 x(t) + 1 - \beta_2 \\ y\left(\frac{t}{2}\right) &= \beta_1 y(t) & y\left(\frac{1+t}{2}\right) &= \beta_2 x(t) + \alpha y(t) + \beta_1 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

ainsi que

$$m\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{\gamma_1 m(t)}{1 + \gamma_1 m(t)}, \qquad m\left(\frac{1+t}{2}\right) = \frac{\gamma_2 + m(t)}{\gamma_2}.$$

J'ai établi et utilisé ces équations fonctionnelles, pour le cas où $\gamma_1 = \gamma_2$, dans l'article de 1956 cité plus haut. Considérons ici le cas particulier où

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 1 \left(\text{et } \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta_1 = \frac{\gamma_1}{2}, \quad \beta_2 = \frac{\gamma_2}{2}\right).$$

Comme

$$\gamma_2 x'(t) + \gamma_1 y'(t) = 1 ,$$

on peut poser

$$\gamma_1 y'(t) = f(t) , \qquad \gamma_2 x'(t) = 1 - f(t) .$$

Par substitution dans les relations dérivées de (13), il vient

$$f\left(\frac{t}{2}\right) = \gamma_1 f(t) , \qquad f\left(\frac{1+t}{2}\right) = \gamma_1 + (1 - \gamma_1) f(t) .$$

J'ai montré que $f(t)$ est la seule fonction bornée satisfaisant à ces équations, ce qui en fournit une définition très simple, et pour $\gamma_1 \neq \frac{1}{2}$ c'est une fonction singulière déjà étudiée par plusieurs auteurs (voir mon article de 1957 cité plus haut, où l'on trouvera aussi quelques indications bibliographiques).