

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 5 (1959)  
**Heft:** 4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ZWEI LIMITATIONSSÄTZE ÜBER BEREICH-INTEGRALE  
**Autor:** Wendelin, Hermann  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-35497>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ZWEI LIMITATIONSSÄTZE ÜBER BEREICH-INTEGRALE

von Hermann WENDELIN, Graz

(*Reçu le 10 avril 1959*)

Im folgenden werden zwei Limitationssätze für mehrdimensionale Jordansche Integrale über Jordan-messbaren Punktmenigen als Integrationsbereiche entwickelt. Die in den Sätzen formulierten hinreichenden Bedingungen sind handlich und führen durch einfache Spezialisierungen auf in den meisten ausführlicheren Lehrbüchern über Differential- und Integralrechnung anzutreffende Limitationssätze. Dem allgemeineren zweiten Satz wird aus beweistechnischen Gründen der speziellere erste Satz vorangestellt.

Wir führen vorerst, lediglich zur Vereinfachung der Formulierungen und Beweisführungen einige abkürzende Bezeichnungen ein: <sup>1)</sup>

1. Sind  $F(u)$ ,  $G(u, v)$ , ... Aussagen, die von  $u$ , bzw. von  $u$  und  $v$ , ... abhängen, so bedeute

„ $\forall u: F(u)$ “: „Für alle  $u$  gilt  $F(u)$ “

schärfer

„ $\forall u: F(u)$ “: „Für alle  $u$  aus der Menge  $\mathfrak{M}$  gilt  $F(u)$ “.  
 $\in \mathfrak{M}$

Ähnlich ist

„ $\forall u, \forall v: G(u, v)$ “ oder „ $\forall u, v: G(u, v)$ “, ...

zu interpretieren.

„ $\exists u: F(u)$ “: „Es existiert ein  $u$ , sodass  $F(u)$ “, usf.

---

<sup>1)</sup> Also keineswegs mit dem Anspruch auf logistische Darstellung, die natürlich ganz anders aussehen müsste.

2. Sind  $A_1, A_2, \dots, A_k$  und  $B$  Aussagen, so bedeute  
 $\text{,,}A_1, A_2, \dots, A_k \longrightarrow B\text{“: „Aus } A_1 \text{ und } A_2 \text{ und ... und } A_k \text{ folgt } B\text{“.}$
3. Tritt im Laufe eines Beweises ober einem „=“ Zeichen die Nummer einer Formel Definition oder Voraussetzung auf, so bedeutet dies, dass der rechts vom „=“-Zeichen stehende Ausdruck vermöge der Formel aus dem linksstehenden hervorgeht. Z.B. bedeutet  

$$(n)$$
  
 $\text{,,}A = B\text{“: „}B \text{ geht vermöge } (n) \text{ aus } A \text{ hervor.“}$
- (Diese Schreibweise soll nur gelegentlich zur Erleichterung der Einsicht verwendet werden, wobei kein Wert auf vollständiges Zitieren aller gerade in Betracht kommenden Voraussetzungen gelegt wird.)
4. „ $A = B$ “: „ $B$  wird durch  $A$  definiert“.  

$$\text{Df}$$
5. Ist  $\mathfrak{B}$  Punktmenge eines  $n$ -dimensionalen euklidisch-metrischen Raumes, so bedeute  $J_n[\mathfrak{B}]$  den  $n$ -dimensionalen Jordanschen Inhalt von  $\mathfrak{B}$ .
6. „beschr.  $\langle f(P), \mathfrak{B} \rangle$ “: „ $f(P)$  ist auf  $\mathfrak{B}$  beschränkt“  

$$\text{(d.h. } \exists M, \forall P: |f(P)| \leq M)$$
  

$$>0 \quad \in \mathfrak{B}$$
7. „stet.  $\langle f(P), \mathfrak{B} \rangle$ “: „ $f(P)$  ist auf  $\mathfrak{B}$  stetig.“

Wir erklären nun

- Def. 1. { Sei  $B$  eine reelle Zahlenmenge, deren Elementen  $\beta$  eindeutig eine Jordan-messbare Punktmenge  $\mathfrak{B}(\beta)$  zugeordnet werde. Die Menge all dieser  $\mathfrak{B}(\beta)$  werde mit  $\mathfrak{b}$  bezeichnet.  $B'$  sei die Menge der Häufungspunkte von  $B$ .
- Def. 2. { Für irgend zwei Elemente  $\beta'$  und  $\beta''$  aus  $B$  bedeute  $\mathfrak{D}(\beta', \beta'') = \mathfrak{B}(\beta') - \mathfrak{B}(\beta'). \mathfrak{B}(\beta'')$ .  

$$\text{Df}$$

<sup>1)</sup> Wobei  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$  den Durchschnitt der Menge  $\mathfrak{A}$  mit der Menge  $\mathfrak{B}$  bedeute.

Ich merke an

(A. 1.) { Im allgemeinen ist  $\mathfrak{D}(\beta', \beta'') \neq \mathfrak{D}(\beta'', \beta')$

Es bedeute ferner

Def. 3. {  $E(b) = \bigvee_{\substack{Df \\ \in B}} \beta', \beta'': J_n[\mathfrak{D}(\beta', \beta'')] = 0$   
oder  $J_n[\mathfrak{D}(\beta'', \beta')] = 0$  <sup>1)</sup>

Es werde nun folgender Hilfssatz bewiesen:

(H. S.) { 1.  $\left\{ \begin{array}{l} E(b), \beta_0 \in B', \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} J_n[\mathfrak{B}(\beta)] = c \text{ (endlich)} \\ \beta' \rightarrow \beta_0 \quad \beta'' \rightarrow \beta_0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \lim_{\beta' \rightarrow \beta_0} J_n[\mathfrak{D}(\beta', \beta'')] = \lim_{\beta'' \rightarrow \beta_0} J_n[\mathfrak{D}(\beta'', \beta')] = 0 \right\}$   
2.  $\left\{ \begin{array}{l} E(b), \beta_0 \in B, B', \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} J_n[\mathfrak{B}(\beta)] = J_n[\mathfrak{B}(\beta_0)] \\ \beta \rightarrow \beta_0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} J_n[\mathfrak{D}(\beta, \beta_0)] = \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} J_n[\mathfrak{D}(\beta_0, \beta)] = 0 \right\}$

Beweis von (H. S.):

Ad 1.

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{B}(\beta') = \mathfrak{B}(\beta') \cdot \mathfrak{B}(\beta'') + \mathfrak{D}(\beta', \beta'') \\ \mathfrak{B}(\beta'') = \mathfrak{B}(\beta') \cdot \mathfrak{B}(\beta'') + \mathfrak{D}(\beta'', \beta') \end{array} \right.$$

Die Summanden rechts sind elementefremd, daher gilt sicher

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_n[\mathfrak{B}(\beta')] = J_n[\mathfrak{B}(\beta') \cdot \mathfrak{B}(\beta'')] + J_n[\mathfrak{D}(\beta', \beta'')] \\ J_n[\mathfrak{B}(\beta'')] = J_n[\mathfrak{B}(\beta') \cdot \mathfrak{B}(\beta'')] + J_n[\mathfrak{D}(\beta'', \beta')] \end{array} \right.$$

Subtraktion und Absolutbetragsbildung ergibt hieraus

$$|J_n[\mathfrak{B}(\beta')] - J_n[\mathfrak{B}(\beta'')]| = |J_n[\mathfrak{D}(\beta', \beta'')] - J_n[\mathfrak{D}(\beta'', \beta')]|$$

daher

$$(3) \quad |J_n[\mathfrak{B}(\beta')] - J_n[\mathfrak{B}(\beta'')]| \geq \text{und} \quad \frac{J_n[\mathfrak{D}(\beta', \beta'')]}{J_n[\mathfrak{D}(\beta'', \beta')]} \geq 0.$$

<sup>1)</sup> Bekanntlich existieren mit  $J_n[\mathfrak{B}_1]$  und  $J_n[\mathfrak{B}_2]$  auch  $I_n[\mathfrak{B}_1 \cdot \mathfrak{B}_2]$ ,  $J_n[\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_1 \cdot \mathfrak{B}_2]$  und  $J_n[\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_1 \cdot \mathfrak{B}_2]$ .

Wegen der Voraussetzungen unter 1. in (H. S.) gibt es zu dem beliebig gewählten  $\varepsilon > 0$  eine reduzierte Umgebung  $U(\beta_0)$ , — das heisst: eine Umgebung von  $\beta_0$ , die nur den Punkt  $\beta_0$  *nicht* enthält, — sodass für alle  $\beta' \in U(\beta_0)$  gilt:

$$(4) \quad |J_n[\mathfrak{B}(\beta')] - c| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |J_n[\mathfrak{B}(\beta'')] - c| < \frac{\varepsilon}{2} ,$$

daher, da

$$J_n[\mathfrak{B}(\beta')] - J_n[\mathfrak{B}(\beta'')] = (J_n[\mathfrak{B}(\beta')] - c) - (J_n[\mathfrak{B}(\beta'')] - c)$$

ist,

$$(5) \quad |J_n[\mathfrak{B}(\beta')] - J_n[\mathfrak{B}(\beta'')]| < \varepsilon .$$

(3), (5) —→

$$(6) \quad 0 \leq J_n[\mathfrak{D}(\beta', \beta'')] < \varepsilon \quad \text{und} \quad 0 \leq J_n[\mathfrak{D}(\beta'', \beta')] < \varepsilon ,$$

woraus schliesslich folgt

$$\lim_{\substack{\beta' \rightarrow \beta_0 \\ \beta'' \rightarrow \beta_0}} J_n[\mathfrak{D}(\beta', \beta'')] = \lim_{\substack{\beta' \rightarrow \beta_0 \\ \beta'' \rightarrow \beta_0}} J_n[\mathfrak{D}(\beta'', \beta')] = 0 .$$

Ad 2.

Setzt man in (3) anstelle von  $\beta'$  und  $\beta''$ :  $\beta$  und  $\beta_0$ , so erhält man

$$(7) \quad |J_n[\mathfrak{B}(\beta)] - J_n[\mathfrak{B}(\beta_0)]| \geq \frac{J_n[\mathfrak{D}(\beta, \beta_0)]}{J_n[\mathfrak{D}(\beta_0, \beta)]} \geq 0 .$$

Zufolge der Voraussetzungen unter 2. in (H. S.) ergibt  $\lim_{\beta \rightarrow \beta_0} J_n[\mathfrak{B}(\beta)] - J_n[\mathfrak{B}(\beta_0)]$  — Bildung des linken Termes von (7) Null, also ist

$$\lim_{\beta \rightarrow \beta_0} J_n[\mathfrak{D}(\beta, \beta_0)] = \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} J_n[\mathfrak{D}(\beta_0, \beta)] = 0 .$$

Wir können jetzt den Satz beweisen.

$$\begin{aligned}
 \text{Satz 1. } & \left\{ \begin{array}{l} V_{1,1} \cdot 1) \text{ } E(\mathfrak{b}), \beta_0 \in B . B' \text{ und} \\ \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} J_n[\mathfrak{B}(\beta)] = J_n[\mathfrak{B}(\beta_0)] \\ V_{1,2} \cdot \text{ beschr. } \langle f(P), V \mathfrak{B}(\beta) \rangle^2 \\ \beta \in B \\ V_{1,3} \cdot \forall \beta: \exists \int f(P) d\tau \\ \in B \quad \mathfrak{B}(\beta) \\ V_{1,1}, V_{1,2}, V_{1,3} \xrightarrow{\beta \rightarrow \beta_0} \int f(P) d\tau = \int f(P) d\tau_{\mathfrak{B}(\beta_0)} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

### Beweis von Satz 1.

Unter Beachtung, dass unter den gemachten Voraussetzungen mit  $\int f(P) d\tau$ ,  $\int f(P) d\tau$  auch  $\int f(P) d\tau$  und  $\int f(P) d\tau$  existiert, hat man mit  $M$  als oberer Schranke für  $|f(P)|$  in  $V \mathfrak{B}(\beta)$ :

$\beta \in B$

Def. 2.

$$\begin{aligned}
 \left| \int f(P) d\tau - \int f(P) d\tau \right| &= \left| \int f(P) d\tau - \int f(P) d\tau \right| = \\
 \mathfrak{B}(\beta) &\quad \mathfrak{B}(\beta_0) \quad \mathfrak{B}(\beta) . \mathfrak{B}(\beta_0) + \mathfrak{D}(\beta, \beta_0) \quad \mathfrak{B}(\beta) . \mathfrak{B}(\beta_0) + \mathfrak{D}(\beta_0, \beta) \\
 &= \left| \int f(P) d\tau - \int f(P) d\tau \right| \leq \left| \int f(P) d\tau \right| + \left| \int f(P) d\tau \right| \leq \\
 \mathfrak{D}(\beta, \beta_0) &\quad \mathfrak{D}(\beta_0, \beta) \quad \mathfrak{D}(\beta, \beta_0) \quad \mathfrak{D}(\beta_0, \beta) \\
 &\leq M \{ J_n[\mathfrak{D}(\beta, \beta_0)] + J_n[\mathfrak{D}(\beta_0, \beta)] \},
 \end{aligned}$$

also

$$(8) \quad \left| \int f(P) d\tau - \int f(P) d\tau \right| \leq M \{ J_n[\mathfrak{D}(\beta, \beta_0)] + J_n[\mathfrak{D}(\beta_0, \beta)] \}.$$

Nun verschwindet aber hierin unter Beachtung von  $V_{1,1}$  und (H. S.) 2. für  $\lim$ -Bildung die rechte Seite, also gilt Gleiches auch

$\beta \rightarrow \beta_0$

1)  $V_{i,k}$  ist die Bezeichnung der rechts stehenden Voraussetzungen.

2)  $V \mathfrak{B}(\beta)$  bedeute die Vereinigungsmenge aller  $\mathfrak{B}(\beta)$ ,  $\beta \in B$ .

für die linke Seite, d.h. es ist

$$\lim_{\beta \rightarrow \beta_0} \int_{\mathfrak{B}(\beta)} f(P) d\tau = \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} f(P) d\tau, \quad \text{w.z.z.w.}$$

*Eine Anwendung von Satz 1.*

Sei  $f(x)$  über  $[a, b]$  integrierbar und  $\beta_0 \in [a, b]$ . Dann gilt

$$\lim_{\beta \rightarrow \beta_0} \int_a^{\beta} f(x) dx = \int_a^{\beta_0} f(x) dx$$

Zum Beweis setze man in Satz 1. für  $\mathfrak{B}(\beta) = [a, \beta]$ ,  $\beta_0 \in [a, b]$ . Die  $\mathfrak{B}(\beta)$  erfüllen dann die Bedingung E(h) und es ist  $\lim_{\beta \rightarrow \beta_0} J_1[\mathfrak{B}(\beta)] = J_1[\mathfrak{B}(\beta_0)]$ , also  $V_{1,1}$  erfüllt. Dass auch  $V_{1,2}$  und  $V_{1,3}$  gelten, ist unmittelbar ersichtlich.

<i>Satz 2.</i>	<div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: flex-start;"> <div style="margin-bottom: 10px;"> <math>V_{2,1} \cdot V_{1,1}, \forall \beta: \mathfrak{B}(\beta) \setminus \mathfrak{P} \text{ und } J_n(\mathfrak{P}) \neq 0. \text{ }^1)</math>  <math>\in B</math> </div> <div> <math>V_{2,2} \cdot \text{beschr. } \langle f(P, \alpha), \mathfrak{P}, A \rangle, \text{ wobei } P \in \mathfrak{P} \text{ und}</math>  <math>\alpha \in A \text{ (A reelle Zahlenmenge)}</math> </div> <div> <math>V_{2,3} \cdot \forall \alpha: \exists \int_{\mathfrak{P}} f(P, \alpha) d\tau</math>  <math>\in A</math> </div> <div> <math>V_{2,4} \cdot \forall P: \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} f(P, \alpha) = \varphi(P) \text{ gleichmäigig in } P</math>  <math>\in \mathfrak{P}</math> </div> <div> <math>V_{2,5} \cdot \exists \int_{\mathfrak{P}} \varphi(P) d\tau.</math> </div> </div>
$V_{2,1}, V_{2,2}, V_{2,3}, V_{2,4}, V_{2,5} \longrightarrow$	$1. \lim_{\substack{\alpha \rightarrow \alpha_0 \\ \beta \rightarrow \beta_1}} \int_{\mathfrak{B}(\beta)} f(P, \alpha) d\tau = \left. \right\}$
	$2. \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_{\mathfrak{B}(\beta)} f(P, \alpha) d\tau = \left. \right\} = \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} \varphi(P) d\tau.$
	$3. \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} \int_{\mathfrak{B}(\beta)} f(P, \alpha) d\tau = \left. \right\}$

<sup>1)</sup> „ $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}$ “ bedeute „ $\mathfrak{A}$  ist Teilmenge von  $\mathfrak{B}$ “.

## Beweis von Satz 2.

Ad 1.

$$(9) \quad \left| \frac{\int f(P, \alpha) d\tau}{\mathfrak{B}(\beta)} - \frac{\int \varphi(P) d\tau}{\mathfrak{B}(\beta_0)} \right| = \left| \frac{\int [f - \varphi] d\tau}{\mathfrak{B}(\beta)} + \left[ \frac{\int \varphi d\tau}{\mathfrak{B}(\beta)} - \frac{\int \varphi d\tau}{\mathfrak{B}(\beta_0)} \right] \right|$$

also mit den Abkürzungen

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta(\alpha, \beta) = \left| \frac{\int f(P, \alpha) d\tau}{\mathfrak{B}(\beta)} - \frac{\int \varphi(P) d\tau}{\mathfrak{B}(\beta_0)} \right| \\ \Phi(\alpha, \beta) = \left| \frac{\int [f(P, \alpha) - \varphi(P)] d\tau}{\mathfrak{B}(\beta)} \right| \\ \Psi(\beta) = \left| \frac{\int \varphi(P) d\tau}{\mathfrak{B}(\beta)} - \frac{\int \varphi(P) d\tau}{\mathfrak{B}(\beta_0)} \right|, \end{array} \right.$$

daher

$$(11) \quad 0 \leq \Theta(\alpha, \beta) \leq \Phi(\alpha, \beta) + \Psi(\beta).$$

Wir untersuchen erst  $\Phi$ , dann  $\Psi$ .Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig gegeben. Ich setze

$$(12) \quad \varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{Df \cdot 2 \cdot J_n(\mathfrak{P})}.$$

Wegen  $V_{2,4}$  gibt es dann eine reduzierte Umgebung  $\mathfrak{U}(\alpha_0)$  von  $\alpha_0$ , sodass

$$(13) \quad \forall \alpha \forall P : \frac{\int f(P, \alpha) d\tau}{\mathfrak{B}(\beta)} - \varphi(P) < \varepsilon^* \quad \forall \alpha \in \mathfrak{U}(\alpha_0) \in \mathfrak{P}$$

ausfällt, umso mehr als wegen  $\forall \beta : \frac{\mathfrak{B}(\beta)}{\mathfrak{B}} < \mathfrak{B}$ 

$$(14) \quad \forall \alpha \in \mathfrak{U}(\alpha_0) \quad \forall \beta \in B \quad \forall P \in \mathfrak{B}(\beta) : \left| \frac{\int f(P, \alpha) d\tau}{\mathfrak{B}(\beta)} - \varphi(P) \right| < \varepsilon^*,$$

Das ergibt

$$(15) \quad \forall \alpha \in \mathfrak{U}(\alpha_0) \quad \forall \beta \in B : 0 \leq \Phi(\alpha, \beta) \leq J_n[\mathfrak{B}(\beta)] \cdot \varepsilon^* \leq J_n(\mathfrak{P}) \cdot \varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{2},$$

also

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \alpha \in \mathfrak{U}(\alpha_0) \quad \forall \beta \in B : 0 \leq \Phi(\alpha, \beta) \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right.$$

Aus  $V_{2,2}$  folgt auch für die Limesfunktion  $\varphi(P)$ :

$$(16) \quad \text{beschr. } < \varphi(P), \mathfrak{P} >, \text{ umso mehr also wegen } V_{2,1}:$$

$$(17) \quad \text{beschr. } < \varphi(P), V \mathfrak{B}(\beta) > \quad \beta \in B$$

Wegen  $V_{2,5}$  gilt auch

$$(18) \quad \forall \beta: \exists \int \varphi(P) d\tau .$$

$$\in B \quad \mathfrak{B}(\beta)$$

(17) besagt, dass  $V_{1,2}$  für  $\varphi(P)$ , (18) dass  $V_{1,3}$  erfüllt ist, aber auch  $V_{1,1}$  ist wegen  $V_{2,1}$  für  $\varphi(P)$  erfüllt.

Satz 1. auf  $\varphi(P)$  angewendet ergibt daher

$$(19) \quad \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} \int \varphi(P) d\tau = \int \varphi(P) d\tau, \text{ d.h.}$$

$$\mathfrak{B}(\beta) \quad \mathfrak{B}(\beta_0)$$

$$(20) \quad \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} \Psi(\beta) = 0;$$

oder, was damit gleichwertig ist:

$$(b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Es gibt eine reduzierte Umgebung } \mathfrak{U}(\beta_0) \text{ von } \beta_0, \text{ sodass} \\ \forall \beta: 0 \leq \Psi(\beta) \leq \frac{\varepsilon}{2} . \end{array} \right.$$

(a), (b) →

$$(21) \quad \forall \alpha \in \mathfrak{U}(\alpha_0) \quad \forall \beta \in \mathfrak{U}(\beta_0) : 0 \leq \Phi(\alpha, \beta) + \Psi(\beta) < \varepsilon .$$

Wegen (11) gilt also auch

$$(22) \quad \forall \alpha \in \mathfrak{U}(\alpha_0) \quad \forall \beta \in \mathfrak{U}(\beta_0) : 0 \leq \Theta(\alpha, \beta) < \varepsilon ,$$

d.h.  $\lim \Theta(\alpha, \beta) = 0$ , somit nach (10):

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow \alpha_0 \\ \beta \rightarrow \beta_0}} \int f(P, \alpha) d\tau = \int \varphi(P) d\tau ,$$

$$\mathfrak{B}(\beta) \quad \mathfrak{B}(\beta_0)$$

also Satz 2., 1.

Ad 2.

Die für  $f(P, \alpha)$  und  $\varphi(P)$  gemachten Voraussetzungen  $V_{2,3}$ ,  $V_{2,4}$  und  $V_{2,5}$  ermöglichen die Anwendung eines bekannten Vertauschungssatzes, wonach

$$(23) \quad \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int f(P, \alpha) d\tau = \int \varphi(P) d\tau$$

$$\mathfrak{B}(\beta) \quad \mathfrak{B}(\beta)$$

und also auch

$$(24) \quad \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \left| \int f(P, \alpha) d\tau - \int \varphi(P) d\tau \right| = \left| \int \varphi(P) d\tau - \int \varphi(P) d\tau \right| = \Psi(\beta)$$

$$\mathfrak{B}(\beta) \quad \mathfrak{B}(\beta_0)$$

gilt.

Nochmalige Limitation hierin nach  $\beta$  liefert

$$\lim_{\beta \rightarrow \beta_0} \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \left| \frac{\int f(P, \alpha) d\tau}{\mathfrak{B}(\beta)} - \frac{\int \varphi(P) d\tau}{\mathfrak{B}(\beta_0)} \right| = \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} \Psi(\beta) (20) = 0,$$

was angesichts dessen, dass  $\int \varphi(P) d\tau$  eine Konstante ist, die Behauptung unter Satz 2., 2. ergibt.

Ad 3.

$f(P, \alpha)$  erfüllt zunächst  $V_{1,2}$  und  $V_{1,3}$  von Satz 1. für alle  $\alpha$ , desgleichen aber auch  $V_{1,3}$ , dies, da aus  $V_{2,3}$  auch

$$\forall \alpha \forall \beta: \int f(P, \alpha) d\tau$$

$$\in A \in B \quad \mathfrak{B}(\beta)$$

folgt. In Satz 1. anstelle von  $f(P)$ :  $f(P, \alpha)$  gesetzt, führt auf

$$(25) \quad \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} \frac{\int f(P, \alpha) d\tau}{\mathfrak{B}(\beta)} = \frac{\int f(P, \alpha) d\tau}{\mathfrak{B}(\beta_0)},$$

sodass auch

$$(26) \quad \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} \left| \frac{\int f(P, \alpha) d\tau}{\mathfrak{B}(\beta)} - \frac{\int \varphi(P) d\tau}{\mathfrak{B}(\beta_0)} \right| = \left| \frac{\int f(P, \alpha) d\tau}{\mathfrak{B}(\beta_0)} - \frac{\int \varphi(P) d\tau}{\mathfrak{B}(\beta_0)} \right|$$

wird. Aus denselben Gründen, die (23) legitimierten, trifft wieder

$$(27) \quad \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \frac{\int f(P, \alpha) d\tau}{\mathfrak{B}(\beta_0)} = \frac{\int \varphi(P) d\tau}{\mathfrak{B}(\beta_0)} \text{ zu.}$$

(26), (27)  $\longrightarrow$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} \left| \frac{\int f(P, \alpha) d\tau}{\mathfrak{B}(\beta_0)} - \frac{\int \varphi(P) d\tau}{\mathfrak{B}(\beta_0)} \right| = \left| \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \frac{\int f(P, \alpha) d\tau}{\mathfrak{B}(\beta_0)} - \frac{\int \varphi(P) d\tau}{\mathfrak{B}(\beta_0)} \right| = 0,$$

d.h., es gilt auch Satz 2., 2.

- 
- (A. 2.) {
1. Setzt man in Satz 2.  $A = B$  und lässt  $\alpha_0$  mit  $\beta_0$  zusammenfallen, so erhält man unter im übrigen gleichen Voraussetzungen wie dort
  2. Satz 1. stellt einen Spezialfall von Satz 2. dar.
- $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \frac{\int f(P, \alpha) d\tau}{\mathfrak{B}(\alpha)} = \frac{\int \varphi(P) d\tau}{\mathfrak{B}(\alpha_0)}.$   
(Eine bekannte Beziehung.)

Führt man die Definition ein:

$$E^*(\mathfrak{b}) = \text{Df } \bigvee_{\in B} \beta', \beta'': \left\{ \mathfrak{B}(\beta') \prec \mathfrak{B}(\beta'') \quad \text{oder} \quad \mathfrak{B}(\beta'') \prec \mathfrak{B}(\beta') \right\},$$

so gilt die manchmal nützliche Beziehung

$$(A. 3.) \quad \{ \quad E^*(\mathfrak{b}) \longrightarrow E(\mathfrak{b})$$

wie die folgenden Überlegungen sofort lehren:

$$E^*(\mathfrak{B}) \rightarrow \{ \mathfrak{D}(\beta', \beta'') = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{D}(\beta'', \beta') = 0 \} \longrightarrow \\ \{ \mathfrak{I}_n[(\beta', \beta'')] = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{I}_n[(\beta'', \beta')] = 0 \}.$$

Schliesslich können wir noch aufgrund von Satz 2. beweisen:

$$\left. \begin{array}{l} V_I. \quad \text{stet. } \langle f(x, \alpha), [a, b], A \rangle \text{ und beschr.} \\ \quad \quad \quad \langle f(x, \alpha), [a, b], A \rangle \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} V_{II}. \quad \text{stet. } \langle \varphi(\beta), B \rangle, \text{ stet. } \langle \Phi(\gamma), C \rangle \text{ und} \\ \quad \quad \quad \forall \beta = \varphi(\beta) \in [a, b], \forall \gamma = \Phi(\gamma) \in [a, b] \end{array} \right.$$

$$V_{III}. \quad \alpha_0 \in A \cdot A', \quad \beta_0 \in B \cdot B', \quad \gamma_0 \in C \cdot C'$$

$$V_{IV}. \quad \forall x: \lim_{\substack{\in [a, b] \\ \alpha \rightarrow \alpha_0}} f(x, \alpha) = f(x, \alpha_0) \text{ gleichmässig in } x.$$

$$(A. 4.) \quad V_I, V_{II}, V_{III}, V_{IV} \longrightarrow$$

$$(F) \lim_{\delta_1 \rightarrow \delta_{10}} \lim_{\delta_2 \rightarrow \delta_{20}} \lim_{\delta_3 \rightarrow \delta_{30}} \int_{\varphi(\beta)}^{\Phi(\gamma)} f(x, \alpha) dx = \\ = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow \alpha_0 \\ \beta \rightarrow \beta_0 \\ \gamma \rightarrow \gamma_0}} \int_{\varphi(\beta)}^{\Phi(\gamma)} f(x, \alpha) dx = \int_{\varphi(\beta_0)}^{\Phi(\gamma_0)} f(x, \alpha_0) dx,$$

worin  $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$  bzw.  $(\delta_{10}, \delta_{20}, \delta_{30})$  eine beliebige Anordnung der drei Parameter  $\alpha, \beta, \gamma$ , bzw. von  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  ist.

*Beweis von (A. 4.).*

Es ist, wenn  $c \in (a, b)$ :

$$(28) \quad \int_{\varphi(\beta)}^{\Phi(\gamma)} f(x, \alpha) dx = \int_{\varphi(\beta)}^C f(x, \alpha) dx + \int_C^{\Phi(\gamma)} f(x, \alpha) dx.$$

Ich betrachte zuerst  $\int_{\varphi(\beta)}^C f(x, \alpha) dx$ .

Die Mengen  $B(\beta)$  sind hier durch die von  $\beta$  abhängigen Integrationsintervalle  $[\varphi(\beta), c]$ , bzw.  $[c, \varphi(\beta)]$  gegeben und erfüllen offenbar die Voraussetzung  $V_{2,1}$ ; ebenso erfüllt  $f(x, \alpha)$  aufgrund der für sie gemachten Voraussetzungen die entsprechenden Voraussetzungen von Satz 2, wenn man dort  $x$  anstelle von  $P$  und  $f(x, \alpha_0)$  anstelle von  $\varphi(P)$  schreibt. Daher ist nach Satz 2.:

$$(29) \quad \lim_{\substack{\alpha \rightarrow \alpha_0 \\ \beta \rightarrow \beta_0}} \int_C^C f(x, \alpha) dx = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} \int_C^C f(x, \alpha) dx = \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_C^C f(x, \alpha) dx = \\ = \int_{\varphi(\beta_0)}^C f(x, \alpha_0) dx.$$

Da hierin sämtliche Ausdrücke von  $\gamma$  unabhängig sind, folgt aus (29) weiter durch  $\gamma = \text{Limitation}$ :

$$(30) \quad \lim_{\substack{\alpha \rightarrow \alpha_0 \\ \beta \rightarrow \beta_0 \\ \gamma \rightarrow \gamma_0}} \int_C^C f(x, \alpha) dx = \lim_{\substack{\delta_1 \rightarrow \delta_{10} \\ \delta_2 \rightarrow \delta_{20} \\ \delta_3 \rightarrow \delta_{30}}} \lim_{\varphi(\beta)} \int_C^C f(x, \alpha) dx = \int_{\varphi(\beta_0)}^C f(x, \alpha_0) dx.$$

Ganz ebenso verfährt man mit dem zweiten Integral der rechten Seite von (28) und erhält

$$(31) \quad \lim_{\substack{\alpha \rightarrow \alpha_0 \\ \beta \rightarrow \beta_0 \\ \gamma \rightarrow \gamma_0}} \int_C^{\Phi(\gamma)} f(x, \alpha) dx = \lim_{\substack{\delta_1 \rightarrow \delta_{10} \\ \delta_2 \rightarrow \delta_{20} \\ \delta_3 \rightarrow \delta_{30}}} \lim_{C} \int_C^{\Phi(\gamma)} f(x, \alpha) dx = \int_C^{\Phi(\gamma_0)} f(x, \alpha_0) dx.$$

(30), 31  $\longrightarrow$  (A. 4.), w. z. z. w.