Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 5 (1959)

Heft: 4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR QUELQUES PRINCIPES EXTRÉMAUX DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

Autor: Hersch, Joseph

Kapitel: 7. Un pas vers un principe de Thomson pour la membrane vibrante.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-35495

6. Un passage Dirichlet $\longrightarrow$ Thomson, à l'aide des lignes de flux d'un champ vectoriel $\vec{p}$ concurrent pour Thomson.

Partageons le domaine G en lanières G_j par des lignes de flux $\varkappa$ de $\vec{p}$, comme au § 4.1; dans le principe de Dirichlet (§ 1.1)

$$D(\varphi) = \mathrm{Min}_v D(v),\ v \text{ continue dans G, lisse par morceaux} = \begin{cases} 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ 1 \text{ sur } \Gamma_1, \end{cases}$$

admettons maintenant à concurrence également les fonctions $\tilde{v}$ discontinues le long des coupures $\varkappa$; c'est-à-dire que nous exigeons seulement la continuité dans chaque lanière G_j: le minimum diminue évidemment et l'on a

$$D(\varphi) \geqslant \mathrm{Min}_{\tilde{v}} D(\tilde{v}) .$$

Soit $\tilde{v}_j$ la restriction de $\tilde{v}$ à G_j, et soit de nouveau w_j la solution du problème mixte dans G_j: $w_j = 0$ sur Γ_{0j}, $w_j = 1$ sur Γ_{1j}, $\dfrac{\partial w_j}{\partial n} = 0$ sur les coupures $\varkappa$.

$$\mathrm{Min}_{\tilde{v}} D(\tilde{v}) = \sum_j \mathrm{Min}_{\tilde{v}_j} D(\tilde{v}_j) = \sum_j D(w_j) = \oint_{\Gamma_1} \frac{\partial w}{\partial n} ds = D(w),$$

comme au § 4. 1; pour des lanières G_j de largeur infinitésimale, on retrouve, comme au § 4. 2, le principe de Thomson:

$$\frac{\left(\oint_{\Gamma_1} \vec{p}\,.\,\vec{n}\, ds\right)^2}{\iint_G \vec{p}^2\, dx dy} \leqslant D(w) ,$$

donc $\leqslant D(\varphi)$ en vertu de ce qui précède.

7. Un pas vers un principe de Thomson pour la membrane vibrante.

7. 1. Cherchons à réaliser, pour le problème de la membrane vibrante (§ 1. 2), un passage analogue à celui du § 6; à

présent: « *de Rayleigh à Thomson* ». Pour cela, partageons le domaine G du § 1.2 en sous-domaines G_j (fig. 6).

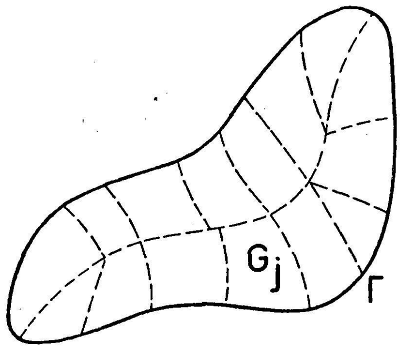

Fig. 6

Dans le principe de Rayleigh

$\lambda_1 = \mathrm{Min}_v\, R[v]$, v continue dans G, lisse par morceaux, $= 0$ sur Γ,

nous voulons maintenant admettre également à concurrence les fonctions $\tilde{v}$ discontinues le long des coupures. Le minimum ne peut évidemment que décroître:

$$\lambda_1 \geqslant \mathrm{Min}_{\tilde{v}}\, R[\tilde{v}]\ ;$$

appelons $\tilde{v}_j$ la restriction de $\tilde{v}$ à G_j.

Soient, dans G_j, ξ_j la première valeur propre et w_j la fonction propre correspondante, d'une membrane G_j liée le long de Γ_j, libre sur les « coupures »; on a $\Delta w_j + \xi_j w_j = 0$ et $w_j > 0$ dans G_j, $w_j = 0$ sur Γ_j, $\frac{\partial w_j}{\partial n} = 0$ sur les coupures; $\xi_j = \mathrm{Min}_{\tilde{v}_j}\, R[\tilde{v}_j]$. Donc

$$\lambda_1 \geqslant \mathrm{Min}_{\tilde{v}}\, R[\tilde{v}] = \mathrm{Min}_{\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_m} \frac{\sum_j D(\tilde{v}_j)}{\sum_j \iint_{G_j} \tilde{v}_j^2\, dx\, dy} = \mathrm{min}_j\, \xi_j\ .$$

Si toutes les coupures sont des lignes de flux de grad φ (φ étant la fonction propre fondamentale, cf. § 1.2), w_j est simplement la restriction de φ à G_j et l'on a, pour tout j,

$$\xi_j = R[w_j] = \lambda_1$$

Nous pouvons donc énonçer le résultat suivant:

$$\lambda_1 = \mathrm{Max}_{\text{découpages de G en lanières } G_j}\ \mathrm{min}_j\, \xi_j\ .$$ [1]

[1] à Voir ce sujet: *C.R. Acad. Sci. Paris*, *248*, 1959, p. 2060, où deux applications numériques sont indiquées.

7. 2. Dans le cas limite de bandes G_j de largeur infinitésimale, on a, dans chaque G_j, un problème à une seule variable indépendante, car $w_j = w_j(s)$.

Le parallélisme entre ce § 7 et le précédent permet d'interpréter ce résultat comme un pas en direction d'un « principe de Thomson » pour la membrane vibrante. La difficulté reste évidemment le calcul (ou l'évaluation par défaut) de tous les ξ_j. Peut-on aller au-delà de cette formulation ? La question reste ouverte.