

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 5 (1959)
Heft: 4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR QUELQUES PRINCIPES EXTRÉMAUX DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE
Autor: Hersch, Joseph
Kapitel: 7. Un pas vers un principe de Thomson pour la membrane vibrante.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-35495>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

6. UN PASSAGE DIRICHLET \longrightarrow THOMSON,
à l'aide des lignes de flux d'un champ vectoriel \vec{p}
concurrent pour Thomson.

Partageons le domaine G en lanières G_j par des lignes de flux κ de \vec{p} , comme au § 4.1; dans le principe de Dirichlet (§ 1.1)

$$D(\varphi) = \text{Min}_v D(\varphi), \varphi \text{ continue dans } G, \text{ lisse par morceaux} = \begin{cases} 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ 1 \text{ sur } \Gamma_1, \end{cases}$$

admettons maintenant à concurrence également les fonctions $\tilde{\varphi}$ discontinues le long des coupures κ ; c'est-à-dire que nous exigeons seulement la continuité dans chaque lanière G_j : le minimum diminue évidemment et l'on a

$$D(\varphi) \geq \text{Min}_{\tilde{v}} D(\tilde{\varphi}).$$

Soit $\tilde{\varphi}_j$ la restriction de $\tilde{\varphi}$ à G_j , et soit de nouveau ω_j la solution du problème mixte dans G_j : $\omega_j = 0$ sur Γ_{0j} , $\omega_j = 1$ sur Γ_{1j} , $\frac{\partial \omega_j}{\partial n} = 0$ sur les coupures κ .

$$\text{Min}_{\tilde{v}} D(\tilde{\varphi}) = \sum_j \text{Min}_{\tilde{v}_j} D(\tilde{\varphi}_j) = \sum_j D(\omega_j) = \oint_{\Gamma_1} \frac{\partial \omega}{\partial n} ds = D(\omega),$$

comme au § 4.1; pour des lanières G_j de largeur infinitésimale, on retrouve, comme au § 4.2, le principe de Thomson:

$$\frac{\left(\oint_{\Gamma_1} \vec{p} \cdot \vec{n} ds \right)^2}{\iint_G \vec{p}^2 dx dy} \leq D(\omega),$$

donc $\leq D(\varphi)$ en vertu de ce qui précède.

7. UN PAS VERS UN PRINCIPE DE THOMSON
POUR LA MEMBRANE VIBRANTE.

7.1. Cherchons à réaliser, pour le problème de la membrane vibrante (§ 1.2), un passage analogue à celui du § 6; à

présent: « *de Rayleigh à Thomson* ». Pour cela, partageons le domaine G du § 1.2 en sous-domaines G_j (fig. 6).

Dans le principe de Rayleigh

$$\lambda_1 = \text{Min}_v R[v], \quad v \text{ continue dans } G, \\ \text{lisse par morceaux, } = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

nous voulons maintenant admettre également à concurrence les fonctions \tilde{v} discontinues le long des coupures. Le minimum ne peut évidemment que décroître:

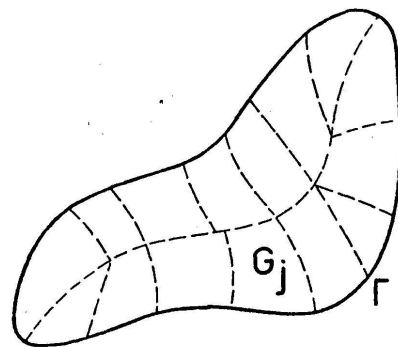


Fig. 6

$$\lambda_1 \geq \text{Min}_{\tilde{v}} R[\tilde{v}];$$

appelons \tilde{v}_j la restriction de \tilde{v} à G_j .

Soient, dans G_j , ξ_j la première valeur propre et ω_j la fonction propre correspondante, d'une membrane G_j liée le long de Γ_j , libre sur les « coupures »; on a $\Delta \omega_j + \xi_j \omega_j = 0$ et $\omega_j > 0$ dans G_j , $\omega_j = 0$ sur Γ_j , $\frac{\partial \omega_j}{\partial n} = 0$ sur les coupures; $\xi_j = \text{Min}_{\tilde{v}_j} R[\tilde{v}_j]$.
Donc

$$\lambda_1 \geq \text{Min}_{\tilde{v}} R[\tilde{v}] = \text{Min}_{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_m} \frac{\sum_j D(\tilde{v}_j)}{\sum_j \iint_{G_j} \tilde{v}_j^2 dx dy} = \min_j \xi_j.$$

Si toutes les coupures sont des lignes de flux de grad φ (φ étant la fonction propre fondamentale, cf. § 1.2), ω_j est simplement la restriction de φ à G_j et l'on a, pour tout j ,

$$\xi_j = R[\omega_j] = \lambda_1$$

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant:

$$\lambda_1 = \text{Max}_{\text{découpages de } G \text{ en lanières } G_j} \min_j \xi_j. \quad 1)$$

1) à Voir ce sujet: *C.R. Acad. Sci. Paris*, 248, 1959, p. 2060, où deux applications numériques sont indiquées.

7. 2. Dans le cas limite de bandes G_j de largeur infinitésimale, on a, dans chaque G_j , un problème à une seule variable indépendante, car $\omega_j = \omega_j(s)$.

Le parallélisme entre ce § 7 et le précédent permet d'interpréter ce résultat comme un pas en direction d'un « principe de Thomson » pour la membrane vibrante. La difficulté reste évidemment le calcul (ou l'évaluation par défaut) de tous les ξ_j . Peut-on aller au-delà de cette formulation ? La question reste ouverte.