Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 5 (1959)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE FINI ET FONCTIONS MÉROMORPHES

Autor: Valiron, Georges

Kapitel: V. Théorie des surfaces de recouvrement d'Ahlfors.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-35471

FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE FINI ET FONCTIONS MÉROMORPHES

par Georges Valiron †

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS MÉROMORPHES
(suite et fin)

V. Théorie des surfaces de recouvrement d'Ahlfors.

50. *Feuillets et couches de feuillets de la surface de Riemann.*

Nous considérons une fonction $Z = f(z)$ méromorphe dans le cercle $|z| \leqslant r$ et sur sa circonférence C_r. Lorsque z décrit le cercle, l'image de Z sur la sphère Σ (nº 42) décrit une surface de Riemann W limitée par la courbe Γ_r image de $Z = f(z)$ lorsque z décrit C_r. Γ_r est une courbe continue analytique (sauf aux images des points Z pour lesquels $Z = f(z)$ a des racines multiples). Γ_r détermine sur Σ un nombre fini de domaines D_k qui sont tous simplement connexes. Marquons aussi les points Z_j pour lesquels $Z_j = f(z)$ a une racine multiple $|z| \leqslant r$ (ce sont les points $Z_j = f(z_j)$, $f'(z_j) = 0$, et le point P de Σ diamétralement opposé à O s'il y a des pôles multiples). Lorsque Z (en appelant Z à la fois le nombre Z et son image sphérique) appartient à un D_k ne contenant pas de points Z_j ou P (s'il y a des pôles multiples), les branches de la fonction inverse $\Phi(Z)$ de $Z = f(z)$, s'il y en a, sont holomorphes; et aux D_k correspondent des domaines d_k^ν du cercle C_r, sans points communs, dans lesquels $f(z)$ est univalente. Les D_k sont les projections de feuillets simples D_k^ν de W (exactement de portions de feuillets). Si un D_k contient des points Z_j ou P, on rend D_k privé de ces points simplement connexe en joignant ces points aux portions de Γ_r formant la frontière de D_k par des courbes simples λ_k (formées, par exemple, d'arcs de grands cercles de Σ) ne se coupant pas dans D_k et on peut appliquer de nouveau ce qui précède. On a ainsi effectué un pavage de la surface W en feuillets simples auxquels correspond un pavage de l'intérieur de C_r en domaines d'univalence d_k^ν. On pourra simplifier les d_k^ν et les D_k^ν correspondants projetés sur D_k en supprimant dans chaque d_k^ν les frontières qui ne sont frontières que de d_k^ν, c'est-à-dire qui aboutissent à des points z_j qui sont racines simples de $Z_j = f(z)$. On forme la surface W en raccordant les domaines D_k^ν qui correspondent à des d_k^ν adjacents. A chaque D_k correspondent des feuillets D_k^ν de W en nombre égal au nombre des d_k^ν correspondants; ces feuillets D_k^ν ont pour frontières des courbes projetées sur des portions de Γ_r et sur les courbes λ_k.

Les points de la sphère qui appartiennent à l'un des domaines D_k ou à sa frontière forment un domaine W_1 et sa frontière qui n'est composée que d'arcs de Γ_r; W_1 est l'ensemble des points de Σ qui sont couverts au moins une fois par les feuillets de W, on appellera W_1 la première couche de feuillets. On peut de même considérer les points de Σ qui sont couverts au moins deux fois par les feuillets de W, ils forment un domaine W_2 qu'on appellera la seconde couche de feuillets. Puis on définira $W_3, \ldots, W_p, \ldots$; W_p sera le domaine formé par les points de Σ qui sont couverts p fois au moins par les feuillets de W. Chaque couche W_p n'a pour frontière que des portions de Γ_r. Un point Z_j correspondant à une racine d'ordre q de $Z_j = f(z)$ figure q fois dans ce compte, il y a d'ailleurs q feuillets de W se raccordant le long d'une ligne λ_k^ν issue de ce point ou d'une ligne projetée sur Γ_r. Si $A_1, A_2, \ldots, A_N$ sont les aires de $W_1, \ldots, W_N$ et A l'aire totale de W ($A = \pi S(r)$), on a évidemment

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_N .$$

Si $L_1, L_2, \ldots, L_N$ sont les longueurs des frontières de $W_1, \ldots, W_N$, comme ces frontières reconstituent exactement Γ_r de longueur $L = L(r)$ car elles proviennent des d_k^ν admettant un arc de C_r pour frontière, on a de même

$$L = L_1 + L_2 + \ldots + L_N .$$

Dans beaucoup de cas, les premières couches $W_1, \ldots, W_p$ comprendront tout Σ, pour ces couches on aura $A_1 = A_2 = \ldots = A_p = \pi$ et $L_1 = L_2 = \ldots = L_p = 0$.

Les domaines W_p sont des domaines simples (à une seule couche) de la sphère, tandis que les feuillets D_k^ν de W projetés sur un D_k sont simples ou ramifiés. Un domaine D_k dans lequel les valeurs Z sont prises q fois appartient à $W_1, W_2, \ldots, W_q$ mais plus à W_{q+1}. Les couches W_p ne sont pas nécessairement simplement connexes.

51. *Caractéristique et triangulation d'une surface simple.*

Considérons sur Σ un domaine Δ (simple), borné par $q + 1$ courbes simples: une courbe qu'on peut regarder comme frontière extérieure et q courbes intérieures. On peut rendre ce domaine simplement connexe, c'est-à-dire de connexion 1, par q coupures joignant les courbes intérieures à la courbe extérieure. *La connexion est* $C = q + 1$. C'est le nombre de coupures que l'on doit tracer pour rendre simplement connexe, augmenté d'une unité.

On peut imaginer que les $q + 1$ courbes simples bornant Δ sont des lignes polygonales, alors on a un polygone de connexion $q + 1$ que l'on peut décomposer en triangles. Par exemple, dans le cas ci-contre de Δ limité par $\Gamma, \Gamma', \Gamma''$ un triangle de décomposition sera ABC constitué par deux lignes AB, AC et par un arc de Γ''. Les points A, B, C seront les *sommets*, AC, AB, BC seront les côtés (ou *arêtes*) et ABC sera un triangle ou une *face*. Si l'on opère ainsi une *triangulation du domaine*, si l'on désigne par f le nombre des faces, par *a le nombre des arêtes intérieures à* Δ et par *s le nombre des sommets intérieurs à* Δ, *le nombre*

$$\rho = a - s - f$$

est indépendant de la façon d'opérer et égal à $C - 2$, C *étant l'ordre de connexion.* ρ *est la caractéristique du domaine* Δ. On a

$$\rho = C - 2 .$$

Pour un triangle $\rho = -1$.

Si un domaine a été décomposé en triangles et si l'on coupe le long d'une ligne formée d'arêtes et allant de bord à bord, ligne qu'on appelle transversale, cette ligne devient un bord (ou frontière) et on a supprimé un sommet de moins que d'arêtes; si on ne morcèle pas, la caractéristique ρ est changée en $\rho - 1$. Si on morcèle, on a deux morceaux dont la somme des caractéristiques $\rho' + \rho''$ est $\rho - 1$. Si le domaine est simplement connexe, on le morcèle à chaque opération. Au bout de t opérations on obtient $t + 1$ triangles; la somme de leurs caractéristiques est $-(t + 1)$, on a

$$\rho - t = -(t + 1)$$

donc $\rho = -1$. Pour un domaine de connexion C, C $-$ 1 premières transversales le rendent simplement connexe sans le morceler, donc $\rho - (C - 1) = -1$, $\rho = C - 2$.

Si l'on coupe le domaine le long d'une ligne fermée appartenant au domaine et formée d'arêtes, ligne qu'on appelle *rétrosection*, on supprime autant de sommets que d'arêtes; la somme des caractéristiques des deux domaines obtenus est égale à ρ. Ainsi

Si l'on fait q *coupures successives par transversales le long des arêtes de la triangulation et si l'on obtient des domaines de caractéristiques* ρ_j, *on a*

$$\rho = \Sigma \rho_j + q \,. \tag{1}$$

Si, par des rétrosections successives, on obtient des domaines de caractéristiques ρ_j, *on a*

$$\Sigma \rho_j = \rho \,. \tag{2}$$

Cas de la sphère entière. — On peut faire une triangulation de la sphère entière. Si l'on enlève un triangle, on obtient un domaine de caractéristique -1; si on remet le triangle on ajoute 3 à a, 3 à s et 1 à f, donc pour la sphère entière, surface fermée simple, on a $\rho = -2$.

52. *Caractéristique de* W.
Relation avec les caractéristiques des W_n.

Si l'on considère la surface de Riemann W, on peut en faire une triangulation en décomposant en triangles les feuillets D_k^ν (on prend obligatoirement pour sommets tous les points de ramification). Cette triangulation correspond biunivoquement à une triangulation du cercle de circonférence C_r respectant les frontières des d_k^ν. Le nombre $a - s - f$ est donc égal à la caractéristique -1 de C_r. *La caractéristique* ρ *de* W *est* -1. Pour faire la triangulation des D_k^ν correspondant à un même k, il suffit de faire la triangulation de D_k en respectant les lignes λ_k et prenant pour sommets tous les points de ramification. On fera ainsi en même temps une triangulation de chaque W_n. Soit ρ_n la caractéristique de W_n. Nous allons comparer ρ à $\sum_1^N \rho_n$. En regardant les choses dans C_r, on voit que le nombre total des triangles dans les W_n est égal au nombre de triangles dans W; de même le nombre total des arêtes dans les W_n est égal au nombre d'arêtes dans W. Il en est autrement pour les sommets. Sur W, un point de ramification est un sommet unique sur la portion de W où il se trouve, mais si μ est l'ordre de ce point, W comporte $\mu + 1$ feuillets au voisinage de ce point, on a donc, correspondant à cette portion de W, $\mu + 1$ couches W_n et $\mu + 1$ sommets superposés en ce même point. Il s'ensuit que s étant le nombre de sommets de W, s_n de W_n, on a

$$s = \sum_1^N s_n - \Sigma\mu$$

$\Sigma\mu$ est l'ordre total de ramification de W. Si l'on pose

$$v = \Sigma\mu\ , \tag{3}$$

on a

$$\rho = \sum_1^N a_n - \sum_1^N f_n - \sum_1^N s_n + \sum \mu = \sum_1^N \rho_n + v\ . \tag{4}$$

53. *Extension au cas du recouvrement d'une portion* Σ_0 *de la sphère* Σ.

Nous considérons maintenant un domaine Σ_0 de la sphère Σ limité par q courbes simples. Nous supposons que ces courbes sont composées d'arcs analytiques en nombre fini, notamment d'arcs de cercles. Ce domaine Σ_0 est de connexion q, de caractéristique $\rho_0 = q - 2$. Les courbes frontières de Σ_0 coupent encore en un nombre fini de points la courbe Γ_r, donc divisent les D_k en un nombre fini de domaines; elles découpent sur W un nombre fini de portions connexes; nous appellerons encore W ou éventuellement W_{Σ_0} l'une de ces portions. La triangulation de W_{Σ_0} se fera encore en considérant les D_k fractionnés en domaines D'_k par les frontières de Σ_0. On pourra aussi considérer les couches de feuillets $W_1, W_2, \ldots, W_n, \ldots, W_N$ et leurs caractéristiques $\rho_1, \ldots, \rho_n, \ldots, \rho_N$ ainsi que la caractéristique ρ de W. Mais ici ρ ne sera plus nécessairement égal à -1. On aura encore

$$\rho = \Sigma \rho_n + \nu , \tag{5}$$

ν étant l'ordre total de ramification de W_{Σ_0}.

Ici encore une transversale tracée sur W augmentera ρ d'une unité et pourra d'ailleurs scinder W en deux, q transversales successives donneront des surfaces dont la somme des caractéristiques sera $p + q$. Mais le découpage par des rétrosections ne modifie pas la somme des caractéristiques. Ces opérations pourront être envisagées sur la surface simple correspondant à W dans le plan des z, surface qui est une portion du cercle C_r.

Si l'on appelle L et L_n les longueurs des frontières de W et de W_n appartenant au domaine Σ_0 ou à sa frontière, L et les L_n proviennent encore d'arcs de courbes appartenant à $|z| \leqslant r$, sans points communs intérieurs, et l'on a toujours

$$L = L_{\Sigma_0} = \sum_1^N L_n . \tag{6}$$

Si A_0 est l'aire de Σ_0, A et A_n les aires de W et W_n, on posera encore

$$A = A_0 S , \qquad (S = S_{\Sigma_0}) , \qquad A_n = A_0 S_n$$

et l'on aura encore

$$S = \sum_1^N S_n . \tag{7}$$

Tout ceci reste valable si certaines des courbes limitant Σ_0, ou toutes ces courbes, se réduisent à des points.

54. *Premier théorème sur le recouvrement.*

On a le lemme suivant:

LEMME. — *A* Σ_0 *est attaché un nombre positif* k (= k (Σ_0)) *tel que, si l'on trace dans* Σ_0 *(frontière comprise) une courbe de longueur* L *décomposant* Σ_0 *en deux domaines, la plus petite des aires de ces deux domaines est au plus égale à* kL.

Cette plus petite aire α est au plus $\frac{\pi}{2}$, le théorème est vrai si L est supérieur à un nombre positif arbitraire donné, en particulier si L est supérieur ou égal à la plus courte distance (sphérique) β de deux quelconques des courbes frontières de Σ_0. Supposons alors $L < \beta$. Si L est intérieure à Σ_0, α est au plus égal à la plus petite des deux aires déterminées par la courbe fermée L sur toute la sphère Σ, c'est-à-dire à l'aire de la petite calotte sphérique limitée par une circonférence de longueur L, on a alors $\alpha < k_1$ L, k_1 étant une constante indépendante de Σ_0 qu'il est inutile de préciser. Enfin si L joint deux points d'un même contour frontière de Σ_0, l'arc de cette frontière joignant ces deux points sera aussi inférieur à λL, λ fini si cette frontière est *suffisamment régulière*, ce que nous supposerons. Alors α sera bornée par une frontière de longueur moindre que $(1 + \lambda)$ L et ce qui précède s'appliquera. Le lemme est ainsi établi sous la réserve d'une certaine régularité de la frontière.

COROLLAIRE. — *Le lemme subsiste si au lieu de considérer les aires, on considère le rapport des aires à l'aire de* Σ_0.

Soit alors Δ un domaine appartenant à Σ_0, δ son aire. Introduisons les aires $A_n(\Delta)$ des portions des W_n intérieures à Δ et posons encore

$$S_n(\Delta)\,\delta = A_n(\Delta)\ ,$$

$$S(\Delta) = S_1(\Delta) + \dots + S_N(\Delta)\ .$$

$S(\Delta)$ *est le nombre moyen des couches de feuillets de* W *sur* Δ. On a aussi, d'après (7)

$$S - S(\Delta) = \sum_1^N (S_n - S_n(\Delta))$$

On a d'ailleurs

$$S_n(\Delta)\,\delta \leqslant S_n A_0 \qquad \text{et} \qquad \delta - S_n(\Delta)\,\delta \leqslant A_0 - S_n A_0 \,,$$

donc

$$S_n(\Delta) \leqslant \frac{A_0}{\delta} S_n \,, \qquad 1 - S_n(\Delta) \leqslant \frac{A_0}{\delta}(1 - S_n).$$

donc, puisque $A_0 > \delta$,

$$|S_n - S_n(\Delta)| \leqslant \max(S_n, S_n(\Delta)) \leqslant \frac{A_0}{\delta} S_n \,,$$

$$|S_n - S_n(\Delta)| \leqslant \max(|1 - S_n(\Delta)|, |1 - S_n|) \leqslant \frac{A_0}{\delta}(1 - S_n) \,.$$

Ainsi, d'après le lemme,

$$|S_n - S_n(\Delta)| \leqslant \frac{A_0}{\delta}(\min S_n, 1 - S_n) \leqslant \frac{A_0}{\delta} k L_n \,,$$

L_n étant la frontière de W_n. En additionnant, on a

$$|S - S(\Delta)| \leqslant k \frac{A_0}{\delta} L \,. \tag{8}$$

On a ainsi le premier théorème du recouvrement:

Premier théorème. — *La différence entre le nombre moyen de couches de feuillets d'une surface de Riemann* W *sur* Σ_0 *et sur une portion* Δ *de* Σ_0 *est inférieure en valeur absolue au produit de la longueur de la frontière de* W *dans* Σ_0 *par* $k\frac{A_0}{\delta}$, k *étant un nombre ne dépendant que de* Σ_0, *et* A_0 *et* δ *les aires de* Σ_0 *et* Δ.

55. *Second théorème sur le recouvrement.*

On s'appuie sur ce lemme:

Lemme. — *Si* Σ_0 *est partagé en deux par une courbe ou plusieurs courbes dont la longueur totale est* L *et si* γ *est une courbe appartenant à* Σ_0 *augmenté de sa frontière, la plus petite des longueurs des deux parties de* γ *appartenant aux deux régions déterminées par* L *est moindre que* k′ L, k′ *ne dépendant que de* Σ_0 *et* γ.

C'est évident si $L > \gamma' \eta$, $\eta > 0$, γ' désignant la longueur de γ, il suffit de prendre $k' = \frac{1}{\eta}$. Sinon et si η est assez petit, l'une des deux régions est ou bien complètement intérieure à Σ_0 ou bien s'appuie sur un bord de Σ_0. Dans la première hypothèse, la région envisagée est intérieure à un cercle de rayon $L \leqslant \gamma' \eta$ contenant un point de γ; il suffit de supposer que γ est telle que tout cercle de rayon r assez petit contenant un point de γ contienne une portion de γ de longueur moindre que Hr, H fixe mais aussi grand qu'on le veut, pour que la propriété reste encore vraie dans ce cas. Si la petite région s'appuie sur un bord de Σ_0, on a encore le même résultat, γ pouvant être une portion du bord.

On notera que, si γ et L ont des arcs communs, ces arcs peuvent être considérés à la fois dans les deux domaines.

Donc, comme dans le lemme du nº 54, il faut supposer les frontières de Σ_0 et γ *suffisamment régulières.*

Soit alors sur Σ_0 (+ frontière) un arc régulier γ de longueur l. Si $S_n(\gamma)$ et $S(\gamma)$ sont les quotients par l des longueurs des portions de γ appartenant respectivement à W_n et à W, considérées comme régions (domaines + frontières), on a

$$S(\gamma) = S_1(\gamma) + \dots + S_N(\gamma) .$$

Si γ' est une portion de γ, on définit de même $S(\gamma')$ et $S_n(\gamma')$. On a

$$S_n(\gamma')\, l' \leqslant S_n(\gamma)\, l ,$$

l' étant la longueur de γ'. Donc

$$S_n(\gamma') \leqslant \frac{l}{l'} S_n(\gamma) .$$

De même, en opérant sur les régions complémentaires,

$$1 - S_n(\gamma') \leqslant \frac{l}{l'} [1 - S_n(\gamma)] .$$

On en déduit, comme plus haut,

$$|S_n(\gamma) - S_n(\gamma')| \leqslant \frac{l}{l'} S_n(\gamma) , \qquad |S_n(\gamma) - S_n(\gamma')| \leqslant \frac{l}{l'} [1 - S_n(\gamma)] .$$

$$|S_n(\gamma) - S_n(\gamma')| \leqslant \frac{k''}{l'}\, l\, L_n .$$

Finalement·

$$|\,S(\gamma) - S(\gamma')\,| \leqslant \frac{k'' l}{l'} L . \tag{9}$$

Par suite, comme deux arcs réguliers sont des portions d'un même arc, on voit que

COROLLAIRE. — *La différence des nombres moyens de couches sur deux arcs est moindre en valeur absolue que* λL, λ *ne dépendant que de* Σ_0 *et de ces deux arcs.*

On suppose toujours qu'il s'agit d'arcs réguliers et évidemment que les courbes frontières de Σ_0 sont aussi régulières. D'autre part, il a été sous-entendu que les nombres de morceaux obtenus sur γ (ou γ') sont finis. On se placera toujours dans ces conditions en utilisant des courbes formées d'un nombre fini d'arcs analytiques.

Soit alors un arc γ divisant Σ_0 en deux morceaux et soit Δ le domaine de plus petite aire obtenu. D'après le premier lemme (n° 54)

$$S_n(\Delta) < \frac{k}{\delta}(L_n + l S_n(\gamma)) ,$$

$$1 - S_n(\Delta) < \frac{k}{\delta}[(1 - S_n(\gamma))\, l + L_n] ,$$

puisque la portion de W_n ou de son complémentaire dans Δ est d'aire inférieure à celle du reste de Σ_0. D'ailleurs $\delta < kl$, toujours d'après le premier lemme. Par suite

$$|\,S_n(\Delta) - S_n(\gamma)\,| \leqslant \max\,[S_n(\Delta), S_n(\gamma)] \leqslant \frac{k}{\delta}(l S_n(\gamma) + L_n) ,$$

et

$$|\,S_n(\Delta) - S_n(\gamma)\,| \leqslant \max\,[1 - S_n(\Delta), 1 - S_n(\gamma)] \leqslant \frac{k}{\delta}(l(1 - S_n(\gamma)) + L_n)$$

donc, d'après le second lemme,

$$|\,S_n(\Delta) - S_n(\gamma)\,| \leqslant \frac{k}{\delta} L_n + \frac{kl}{\delta} k' L_n = k'' L_n ,$$

et

$$|\,S(\Delta) - S(\gamma)\,| \leqslant k'' L . \tag{10}$$

Si γ est un arc ne morcelant pas Σ_0, on peut le prolonger pour qu'il morcèle et appliquer l'inégalité (9). Enfin, d'après le premier théorème sur le recouvrement, on peut remplacer S (Δ) par $S = S_{\Sigma_0}$ (inégalité (8)).

On arrive ainsi au second théorème sur le recouvrement:

SECOND THÉORÈME SUR LE RECOUVREMENT. — *La différence entre les nombres moyens des feuillets de la surface* W *sur* Σ_0 *et sur une courbe régulière* γ *appartenant à la région* Σ_0 (Σ_0 + *frontière) est en valeur absolue inférieure au produit de la longueur* L *de la frontière de* W *dans* Σ_0 *multiplié par un nombre* k *qui ne dépend que de* Σ_0 *et de* γ.

$$|S_{\Sigma_0} - S(\gamma)| < k_1 L . \tag{11}$$

Σ_0 peut être toute la sphère Σ.

56. *Théorème fondamental d'Ahlfors.*

Si Σ_0 *est un domaine limité par* q *courbes* C_j, $j = 1, 2, ..., q$, *donc de caractéristique* $\rho_0 = q - 2$ *et si* W *est une surface de Riemann de recouvrement (portion relative à* Σ_0 *de la surface définie par* $Z = f(z)$, ρ *la caractéristique de* W, S *le nombre moyen des feuillets sur* Σ_0 *et* L *la longueur de la frontière dans* Σ_0, *on a*

$$\rho \geqslant \rho_0 S - KL , \tag{12}$$

K *ne dépendant que de* Σ_0.

Il faut évidemment supposer $q > 2$ pour que le théorème présente de l'intérêt.

Pour le montrer, on va d'abord décomposer Σ_0 en deux domaines simplement connexes Δ et Δ′ au moyen de q transversales γ_j joignant les C_j de telle façon que ces transversales soient courbes frontières de Δ et de Δ′, donc en procédant comme dans la figure ci-contre pour $q = 3$, qu'on doit imaginer sur Σ. On suppose que les C_j et γ_j sont des courbes régulières auxquelles on appliquera les théorèmes sur le recouvrement. Les courbes C_j et γ_j seront utilisées dans la triangulation avec la frontière de W (arcs de Γ_2). On suppose donc ces courbes composées d'arcs analytiques en nombre fini afin de n'avoir à considérer qu'un nombre fini de domaines limités par ces courbes.

On supposera que les transversales γ_j ne contiennent pas de projection de points de ramification de W. S'il y avait de tels points sur des γ_j, on pourrait déformer infiniment peu W au voisinage de ces points sans changer ρ, L et S; il suffit à cet effet de déformer la triangulation primitive en déplaçant les sommets placés en ces points de ramification et il sera loisible ensuite d'ajouter de nouveaux triangles dont les côtés seront projetés sur γ_j.

Aux transversales γ_j correspondent sur W des transversales σ projetées sur les γ_f, ces transversales σ ne se coupent pas; soit $n(\sigma)$ leur nombre. Elles divisent W en domaines Ω projetés sur les domaines Δ et Δ'; soit N (Ω) le nombre de ces domaines, qui sont simplement connexes ou non, mais dont les caractéristiques ρ_j sont au moins égales à -1. On a

$$\rho = \Sigma \rho_j + n(\sigma) ,$$

donc

$$\rho \geqslant n(\sigma) - \mathrm{N}(\sigma) . \qquad (13)$$

Classification des domaines Ω. — Chaque portion Ω de W est limitée par des portions de Γ_2 (qui peuvent être projetées sur des C_j, par des arcs C_j et par des transversales σ. On appellera Ω_1 tout domaine Ω dont la frontière ne comporte qu'une seule transversale σ et on appllera σ_1 ces transversales. Puis Ω_2 seront les domaines ne comportant comme frontière σ autre que les σ_1 qu'une seule transversale qu'on appellera σ_2. Puis on aura des Ω_3 et σ_3, etc. Il peut se faire que tous les Ω soient ainsi épuisés. Sinon, il existera des Ω dont la frontière ne renfermera aucune σ nouvelle, ou bien en renfermera au moins deux.

Chaque σ_n partage W en deux parties. Dans la partie qui contient Ω_n toutes les σ frontières sont d'indice moindre que n. Car, si $n \geqslant 2$, Ω_n a aussi pour frontière une σ_p, $p < n$ étant le plus grand possible; or si $p < n - 1$, Ω_n ne serait pas d'indice n, mais d'indice $p + 1 < n$. Il s'ensuit que si une σ_n est relative à deux domaines Ω_n, n est un maximum et tous les Ω sont classés. Ainsi,

S'il existe des Ω_n, il y a correspondance biunivoque entre les Ω_n et les σ_n sauf si les Ω_n forment la totalité des Ω; il y a alors une σ_N, correspondant à $n = N$ maximum, qui est frontière commune de deux domaines Ω_N.

S'il y a des Ω autres que ceux de la classe Ω_n, les deux cas signalés sont possibles. S'il existe un domaine Ω n'ayant pour frontières que des σ_n, donc au moins deux telles frontières, ce domaine est unique, tous les Ω sont des Ω_n sauf ce domaine exceptionnel Ω. Il y a correspondance biunivoque entre les Ω_n et σ_n.

Si les Ω_n n'existent pas, ou s'ils existent mais qu'il existe aussi un Ω ayant deux nouvelles frontières σ au moins autres que les σ_n, les domaines Ω non classés sont de deux sortes: les domaines Ω' limités par moins de q nouvelles transversales σ; les domaines Ω'' limités par au moins q nouvelles transversales σ. Ces nouvelles transversales seront appelées σ_{11} si elles séparent deux domaines Ω', σ_{22} si elles séparent deux domaines Ω'' et σ_{12} si elles séparent un Ω' d'un Ω''.

Les transversales σ se projettent sur les γ_j. Si $l(\sigma)$ est le rapport de la longueur de σ à la longueur de la γ_j sur laquelle elle se projette, on a

$$\sum_1^q S(\gamma_j) = \Sigma\, l(\sigma_n) + \Sigma\, l(\sigma_{1,1}) + \Sigma\, l(\sigma_{1,2}) + \Sigma\, l(\sigma_{2.2}) \,. \quad (14)$$

Le dernier terme n'existe que s'il y a des domaines Ω'' et comme $l(\sigma_{2,2}) \leqslant 1$, il est inférieur ou égal au nombre des transversales séparant deux de ces domaines. Or, dans ce cas, il y a correspondance biunivoque entre les σ_n et Ω_n; dans (13) on peut supprimer les termes correspondants, on a

$$\rho \geqslant \left[n(\sigma_{1,1}) + \frac{1}{2}\, n(\sigma_{1,2}) - M(\Omega')\right] + \left[n(\sigma_{2,2}) + \frac{1}{2}\, n(\sigma_{1,2}) - N(\Omega'')\right] \,. \quad (15)$$

Pour un Ω'_k dont la frontière contient $n_k\ \sigma_{1,1}$ et $n'_k\ \sigma_{1,2}$, on a

$$n_k + n'_k \geqslant 2$$

et en additionnant

$$2n(\sigma_{1,1}) + n(\sigma_{1,2}) \geqslant 2N(\Omega') \,,$$

le premier terme du second membre de (15) est positif ou nul.

De même pour un Ω''_k dont la frontière renferme n_k courbes $\sigma_{2,2}$ et n'_k courbes $\sigma_{1,2}$

$$n_k + n'_k \geqslant q$$

$$n(\sigma_{2,2}) + \frac{1}{2} n(\sigma_{1,2}) \geqslant \frac{q}{2} \mathrm{N}(\Omega'') .$$

Par suite

$$\rho \geqslant \frac{q-2}{q} \left[n(\sigma_{2,2}) + \frac{1}{2} n(\sigma_{1,2}) \right] \geqslant \frac{q-2}{q} n(\sigma_{2,2}) .$$

Cette inégalité vaut encore *a fortiori* s'il n'y a pas de Ω''. Comme le premier membre de (14) est supérieur à $q\mathrm{S} - h_2 \mathrm{L}$ d'après le second théorème du recouvrement, et $\Sigma l(\sigma_{2,2}) \leqslant n(\sigma_{2,2})$, on a

$$q\mathrm{S} - h_2 \mathrm{L} \leqslant \Sigma\, l(\sigma_n) + \Sigma\, l(\sigma_{1,1}) + \Sigma\, l(\sigma_{1,2}) + \frac{\rho q}{q-2} .$$

et l'on a

$$\rho \geqslant (q-2)\,\mathrm{S} - h_3 \mathrm{L} - [\Sigma\, l(\sigma_n) + \Sigma\, l(\sigma_{1,1}) + \Sigma\, l(\sigma_{1,2})] , \qquad (16)$$

h_3 ne dépend que de Σ_0 et des γ_j; S et L sont relatifs à Σ_0 et à W.

Ceci suppose qu'il y a correspondance biunivoque entre les σ_n et Ω_n, donc qu'il y a des Ω' ou Ω''. Si toutes les σ sont des σ_n, on a seulement dans tous les cas, d'après (14)

$$q\mathrm{S} - h_2 \mathrm{L} \leqslant \Sigma\, l(\sigma_n) . \qquad (17)$$

Il convient dans tous les cas de majorer les $\Sigma\, l(\sigma_n)$, $\Sigma\, l(\sigma_{1,2})$, $\Sigma\, l(\sigma_{1,1})$.

Si une portion Ω de W se projette sur Δ par exemple, on a pour les nombres moyens de couches sur γ_j et sur Δ

$$|\mathrm{S}_\Omega(\gamma_j) - \mathrm{S}_\Omega(\Delta)| < h_3 \mathrm{L}_\Omega ,$$

et par suite

$$|\mathrm{S}_\Omega(\gamma_j) - \mathrm{S}_\Omega(\gamma_k)| < h_4 \mathrm{L}_\Omega . \qquad (18)$$

Les σ_n appartiennent aux Ω_n (l'une, une seule, peut appartenir à deux Ω_n); si σ_n se projette sur γ_j, on a, d'après (18),

$$l(\sigma_n) \leqslant \mathrm{S}_{\Omega_n}(\gamma_j) \leqslant \mathrm{S}_{\Omega_n}(\gamma_k) + h_4 \mathrm{L}_{\Omega_n} , \qquad k = 1, 2, \ldots, q ,$$

donc

$$q\, l(\sigma_n) \leqslant \sum_1^q S_{\Omega_n}(\gamma_k) + q h_4 L_{\Omega_n} ,$$

et puisque Ω_n n'a pour frontières que des σ_p,

$$\sum_1^q S_{\Omega_n}(\gamma_k) = \sum_{\Omega_n} l(\sigma_p) .$$

Par suite, une σ_n n'appartenant qu'à deux Ω_n, on a, *a fortiori*

$$q \sum_1^N l(\sigma_n) \leqslant 2 \sum_1^N l(\sigma_n) + q\, h_4 L$$

où $L = L_W$.

Il en résulte que

$$\sum_1^N l(\sigma_n) \leqslant \frac{q}{q-2} h_5 L . \qquad (19)$$

Si toutes les σ sont des σ_n, (17) donne alors

$$qS - h_2 L \leqslant \frac{q}{q-2} h_5 L ,$$

$$(q-2) S - h_6 L \leqslant 0 , \qquad q - 2 = \rho_0 ,$$

donc

$$\rho \geqslant \rho_0 S - KL .$$

Le théorème est établi dans ce cas.

Revenons au cas général où il y a d'autres σ que les σ_n. Comme un domaine Ω' a moins de q frontières autres que des σ_n, il a une frontière qui est une σ_n ou se réduit à zéro. On a donc d'après (18),

$$\sum_{\Omega'} l(\sigma_{12}) + \sum_{\Omega'} l(\sigma_{11}) \leqslant \sum_{i \neq j} S_{\Omega'}(\gamma_j) \leqslant (q-1) S_{\Omega'}(\gamma_j) + (q-1) h_4 L_{\Omega'} ,$$

$S_{\Omega'}(\gamma_j)$ étant nul ou égal à un $l(\sigma_n)$. Mais une σ_n ne peut appartenir qu'à un seul Ω', donc

$$\Sigma\, l(\sigma_{12}) + 2\, \Sigma\, l(\sigma_{11}) \leqslant (q-1)\, \Sigma\, l(\sigma_n) + (q-1) h_4 L .$$

En portant dans (16), on voit que dans ce cas général, le théorème fondamental est encore démontré.

57. *Première application. Théorème de Picard.*

Si $f(z)$ méromorphe à distance finie, donc pour $|z| \leqslant r$ quel que soit r, ne prend pas trois valeurs distinctes a, b, c, on peut prendre pour Σ_0 la sphère privée des images de ces points. On a $q = 3$, $\rho_0 = 1$, et la surface W est simplement connexe, $\rho = 0$. On a, quel que soit r,

$$\mathrm{KL}(r) \geqslant \mathrm{S}(r)$$

$\mathrm{S}(r)$ serait borné d'après le n° 49. Donc $\mathrm{T}(r)/\log r$ serait borné. Il resterait à en déduire que $f(z)$ serait alors une fraction rationnelle et finalement une constante. Mais le théorème de Picard va résulter de la suite. (Théorème de Landau.)

58. *Deuxième application.*
Lemme de Dufresnoy et théorème de Landau.

Dufresnoy [44)] a montré que

Si l'aire sphérique $\pi\,\mathrm{S}(r_0)$ *décrite par* $Z = f(z)$ *pour* $|z| \leqslant r_0$ *est inférieure à 1, on a, pour* $r < r_0$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{S}(r)}{1-\mathrm{S}(r)} < \frac{1}{r_0^2}\frac{\mathrm{S}(r_0)}{1-\mathrm{S}(r_0)}, \tag{20}$$

donc

$$\left(\frac{|f'(0)|}{1+|f(0)|^2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{r_0^2}\frac{\mathrm{S}(r_0)}{1-\mathrm{S}(r_0)}. \tag{21}$$

On a vu (n° 49) que

$$\mathrm{L}(r)^2 \leqslant 2\pi^2 r\frac{d\mathrm{S}}{dr}.$$

Or, pour une couche W_n, si $\mathrm{S}_n < 1$

$$\mathrm{L}_n(r)^2 \geqslant 4\pi^2\mathrm{S}_n(1-\mathrm{S}_n) \tag{22}$$

Car, pour S_n donné, le minimum de L_n a lieu lorsque W_n est simplement connexe et est atteint pour la calotte sphérique d'aire S_n; la formule (22) avec le signe égal est la relation entre l'aire de la calotte et la longueur du cercle la limitant.

D'autre part, on déduit de (21),

$$\Sigma L_n^2 \geqslant 4\pi^2 \Sigma S_n - 4\pi^2 \Sigma S_n^2 \,, \qquad S = \Sigma S_n \,, \qquad S^2 \geqslant \Sigma S_n^2$$

donc

$$L^2 \geqslant \Sigma L_n^2 \geqslant 4\pi^2 S - 4\pi^2 S^2$$

$$2S(1 - S) \leqslant r \frac{dS}{dr}$$

et l'intégration donne (20). D'autre part, l'intégrale donnant $S(r)$ (nº 47) montre que la limite du premier membre de (20) lorsque r tend vers 0 est bien le premier membre de (21).

Si $f(z)$ ne prend pas les valeurs a, b, c, on a

$$S(r)^2 < K^2 \, 2\pi^2 r \frac{dS}{dr} \,,$$

donc, si $r < r_0$, en intégrant

$$\log \frac{r_0}{r} < 2\pi^2 K^2 \left[\frac{1}{S(r)} - \frac{1}{S(r_0)}\right] .$$

A fortiori

$$S(r) \log \frac{r_0}{r} < 2\pi^2 K^2 = \mu \,,$$

r_0 reste borné. Si l'on suppose $\log \frac{r_0}{r} = 2\mu$, on a $S(r) < \frac{1}{2}$, donc d'après le lemme

$$\frac{|f'(0)|}{1 + |f(0)|^2} \leqslant \frac{1}{r} = \frac{e^{2\mu}}{r_0} .$$

On a ainsi ce théorème généralisant le théorème de Landau:

Si la fonction f (z) = $c_0 + c_1 z + \ldots$ *est méromorphe pour*

$$|z| < \frac{1 + |c_0|^2}{|c_1|} \Omega$$

où Ω *est un nombre ne dépendant que de trois valeurs données distinctes* a, b, c, *la fonction prend une fois au moins dans ce cercle l'une des valeurs* a, b, c [45].

59. *Disques et langues. Inégalité fondamentale.*

Soit un domaine Δ de la sphère Σ, simplement connexe, dont la frontière est composée d'arcs analytiques en nombre fini; si une portion de la surface W se trouve sur Δ, on dira qu'une partie de W forme un *disque sur* Δ si cette portion n'a pas de frontière intérieure à Δ. Un disque peut être un feuillet simple de W, ou un groupe de feuillets formant une surface connexe ramifiée. Les points de ramification de W qui peuvent se projeter sur la frontière de Δ ne sont pas à considérer puisque la frontière de Δ sépare les divers feuillets en de tels points.

L'ordre de multiplicité d'un disque est le nombre de feuillets constituant le disque, c'est *un* pour un *disque à un seul feuillet* ou *disque non ramifié.* La somme des ordres de multiplicité des disques de W sur Δ sera désignée par $n(\Delta)$.

Si une portion de W pénétrant dans Δ y a une frontière, on dit que cette portion de W forme une *langue.* Cette dénomination provient de ce que le cas le plus simple serait celui d'un feuillet de W pénétrant dans Δ comme dans la figure I ci-contre. Mais un feuillet simple peut aussi traverser Δ comme dans la figure II, et on peut avoir aussi des langues à plusieurs feuillets ramifiés dans Δ.

Dans l'expression de la moyenne $S(\Delta)$ figure d'abord l'ordre total des disques $n(\Delta)$ et on a, en outre, un terme additif $\mu(\Delta)$ provenant des langues.

L'ordre de multiplicité simple des disques de W sur Δ est *la somme des caractéristiques des disques changées de signes.* Pour un disque non ramifié la caractéristique est -1; pour un disque ramifié, elle dépend de la connexion. L'ordre de multiplicité simple sera désigné par $p(\Delta)$.

La surface Σ_0 est limitée par les q courbes C_j; nous appellerons Δ_j le domaine limité par C_j qui est extérieur à Σ_0. La somme

$$p = \sum_1^q p(\Delta_j)$$

des ordres de multiplicités simples des disques de W appartenant aux Δ_j peut être borné dans les deux sens à l'aide des résultats antérieurs.

Un disque Δ_j^h de Δ_j est une surface de recouvrement de Δ_j pour laquelle le nombre de couches est $n(\Delta_j^h)$, si $\nu(\Delta_j^h)$ est l'ordre de ramification, on a

$$-p(\Delta_j^h) = \Sigma(\rho_j^h)_k + \nu(\Delta_j^h)$$

et comme les couches sont simplement connexes, $(\rho_j^h)_k = -1$, donc

$$p(\Delta_j^h) = n(\Delta_j^h) - \nu(\Delta_j^h) ,$$

$$p(\Delta_j) = n(\Delta_j) - \nu(\Delta_j) \leqslant n(\Delta_j) .$$

D'autre part

$$\mathrm{S}(\Delta_j) = n(\Delta_j) + \mu(\Delta_j) \geqslant n(\Delta_j) .$$

Il s'ensuit que

$$p \leqslant \sum_1^q \mathrm{S}(\Delta_j) ,$$

mais d'après le premier théorème sur le recouvrement,

$$|\mathrm{S}(\Delta_j) - \mathrm{S}(r)| \leqslant h\,\mathrm{L}(r) ,$$

de sorte que

$$p \leqslant q\,\mathrm{S}(r) + k\,\mathrm{L}(r) , \tag{23}$$

k ne dépendant que des C_j.

D'autre part, au-dessus de Δ_j, on a des disques Δ_j^h et des langues Δ_j^{L}. On peut détacher de W ces langues au moyen de transversales en coupant le long de courbes projetées sur C_j qui joignent un point de Γ_r à un point de Γ_2. Il reste des surfaces simplement connexes dont l'ensemble sera désigné par W′. On peut ensuite détacher les disques Δ_j^h des W′ au moyen de rétrosections, il reste des surfaces W″ qui sont surfaces de recouvrement de Σ_0. Les W″ sont de deux sortes: les unes, W_1'', n'ont pas de frontières dans Σ_0, les autres, W_2'', en ont une. Pour les W_1'', la caractéristique ρ vérifie l'inégalité

$$\rho \geqslant (q-2)\,\mathrm{S}_{\Sigma_0} , \qquad \mathrm{S}_{\Sigma_0} \geqslant 1 ;$$

ces surfaces sont multiplement connexes.

On a passé des W′ aux W″ en séparant les Δ_j^h par rétrosections. Par conséquent

$$\Sigma\,\rho\,(W') = \Sigma\,\rho\,(W'') + \Sigma\,\rho\,(\Delta_j^h)\ ,$$

et

$$p = -\,\Sigma\,\rho\,(\Delta_j^h) = \Sigma\,\rho\,(W'') - \Sigma\,\rho\,(W') = \Sigma\,\rho\,(W'') + N\,(W')\ ,$$

N (W′) étant le nombre des domaines W′ (puisque $\rho\,(W') = -1$). Soit $N_1\,(W'')$ le nombre des W″ qui sont simplement connexes, donc de caractéristique — 1. On peut écrire

$$p = \Sigma\,\rho\,(W'') + N\,(W') - N_1\,(W'')\ .$$

Or un W″ simplement connexe est un W_2'', c'est un W′ qui ne contenait pas de disque. Le nombre $N\,(W') - N_1\,(W'')$ est donc le nombre β des domaines W′ qui contiennent des disques. On a

$$p = \beta + \Sigma\,\rho\,(W'')$$

et d'après le théorème fondamental

$$\rho\,(W'') \geqslant (q-2)\,S\,(W'') - KL\,(W'')\ .$$

Il s'ensuit que

$$p \geqslant (q-2)\,S_{\Sigma_0} - KL_{\Sigma_0}\ .$$

Le premier théorème sur le recouvrement montre, d'autre part, que

$$|\,S_{\Sigma_0} - S\,(r)\,| \leqslant K_1\,L\,(r)$$

et il est évident que $L_{\Sigma_0} \leqslant L\,(r)$. Finalement, on arrive à l'inégalité fondamentale d'Ahlfors

$$p = \sum_1^q p\,(\Delta_j) \geqslant (q-2)\,S\,(r) - h_\Delta\,L\,(r)\ , \tag{24}$$

le nombre h_Δ ne dépendant que de la figure formée sur la sphère par les q domaines Δ_j.

On a d'ailleurs vu au § IV que

$$L\,(r)^2 \leqslant 2\,\pi^2\,r\,\frac{dS}{dr} \tag{25}$$

et

$$\mathrm{T}(r) = \int_0^r \frac{\mathrm{S}(t)\,dt}{t} + 0\,(1)\,. \tag{26}$$

60. *Application à l'étude de* n (r, Z).

On peut supposer que les domaines Δ_j se réduisent à des points. Car, si l'on se donne q points, on peut les entourer de petits cercles centrés en ces points. On a $n(\Delta_j) \geqslant p(\Delta_j)$. Par suite, si l'on considère q nombres distincts $a_1, a_2, \ldots, a_q$, on a

$$\sum_1^q n(r, a_j) \geqslant (q-2)\,\mathrm{S}(r) - h(a_1, a_2, \ldots, a_q)\,\mathrm{L}(r)\,. \tag{27}$$

Supposons en particulier que $f(z)$ soit une fonction d'ordre fini positif ρ, on a

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log \mathrm{T}(r)}{\log r} = \rho\,.$$

On sait qu'on déduit alors de (26)

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log \mathrm{S}(r)}{\log r} = \rho\,.$$

(Voir, par exemple, n° 12.) On a vu au n° 49 que l'on a

$$\mathrm{L}(r) < \mathrm{S}(r)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\,, \qquad \varepsilon > 0\,, \tag{28}$$

sauf dans des intervalles dans lesquels la variation totale de $\log r$ est finie. On aura donc, dans ces mêmes conditions,

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log \mathrm{L}(r)}{\log r} \leqslant \frac{\rho}{2}\,.$$

Donc, d'après (27),

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log \sum_1^q n(r, a_j)}{\log r} \geqslant \rho \qquad q \geqslant 2$$

ce qui donne le théorème de Borel:

Il existe deux valeurs Z *au plus pour lesquelles l'ordre de* n (r, Z) *est inférieur à l'ordre* ρ *de* f (z).

On obtiendra un résultat plus serré en introduisant un ordre précisé. Il est clair que si $n(r, Z)$ est d'ordre fini pour trois valeurs de Z, (27) montre, grâce à (28), que la fonction est d'ordre fini.

61. *Défaut et indice de ramification.*

Puisque

$$p(\Delta_j) = n(\Delta_j) - \nu(\Delta_j)$$

on a, en portant dans la formule fondamentale (24)

$$\sum_1^q n(\Delta_j) - \sum_1^q \nu(\Delta_j) \geqslant (q-2)\,S - h_\Delta L$$

ou

$$\sum_1^q [S - n(\Delta_j)] + \sum_1^q \nu(\Delta_j) \leqslant 2S + h_\Delta L\,.$$

Mais S diffère de $S(\Delta_j)$ de moins de $h'_{\Delta_j} L$ et $S(\Delta_j) = n(\Delta_j) + \mu(\Delta_j)$, ce qui donne

$$\sum_1^q \nu(\Delta_j) + \sum_1^q \mu(\Delta_j) \leqslant 2S + k_\Delta L\,.$$

Si l'on pose

$$\delta_j = \varliminf_{r=\infty} \frac{\mu(\Delta_j)}{S(r)}\,, \qquad \varepsilon_j = \varliminf_{r=\infty} \frac{\nu(\Delta_j)}{S(r)}$$

on a, compte tenu de (28)

$$\sum_1^q \delta_j + \sum_1^q \varepsilon_j \leqslant 2\,.$$

C'est la relation des défauts d'Ahlfors où interviennent à la fois un terme relatif à l'indice de ramification des disques et un terme relatif aux langues.

62. *Théorème des domaines.*

Ecrivons la formule fondamentale (24)

$$\sum_1^q (S - p(\Delta_j)) \leqslant 2S(r) + h_\Delta L(r)\,. \tag{29}$$

Supposons que les disques projetés sur Δ_j aient tous ω_j feuillets au moins. Nous aurons $\omega_j \, \Delta(p_j) \leqslant n(\Delta_j)$. Car, pour un disque Δ_j^m, si sa multiplicité simple est 1, le disque est à ω_j feuillets, et si sa multiplicité simple est négative ou nulle, son produit par ω_j est négatif ou nul, donc inférieur au nombre des feuillets. On a ainsi

$$\sum_1^q \omega_j \, \Delta(p_j) \leqslant \sum_1^q n(\Delta_j) \leqslant S(\Delta_j) \leqslant S + k_j L$$

et

$$\sum_1^q \Delta(p_j) \leqslant \frac{S}{\omega_j} + \frac{k_j}{\omega_j} L . \tag{30}$$

D'après (29) et (30)

$$\sum_1^q \left(S - \frac{S}{\omega_j}\right) \leqslant \sum_1^q [S - \Delta(p_j)] \leqslant 2S + h'_\Delta L ,$$

h'_Δ ne dépendant que des Δ_j.

On a ainsi le théorème des domaines d'Ahlfors:

Si Z = f (z) *est méromorphe pour* $|z| \leqslant$ r *et si les* q *domaines* Δ_j *étant donnés, les disques projetés sur* Δ_j *ont au moins* ω_j *feuillets* (j = 1, 2, ..., q), *on a*

$$\sum_1^q \left(1 - \frac{1}{\omega_j}\right) \leqslant 2 + h'_\Delta \frac{L(r)}{S(r)} \cdot \tag{31}$$

Si $Z = f(z)$ est holomorphe pour $|z| \leqslant r$, on peut prendre un domaine Δ_{q+1} contenant le point P image du point à l'infini et q autres domaines, le Δ_{q+1} domaine ne contient aucun disque, la multiplicité simple est nulle et (29) devient

$$\sum_1^q (S - p(\Delta_j) \leqslant S(r) + h_\Delta L(r) .$$

Donc, *pour une fonction holomorphe, le 2 du second membre de (31) doit être remplacé par 1.*

63. *Application. Théorème de Bloch.*

L'inégalité (31) peut s'écrire

$$\mathrm{S}(r)\left[q-2-\sum_{1}^{q}\frac{1}{\omega_j}\right] \leqslant k\,\mathrm{L}(r)$$

et d'après (25)

$$\mathrm{S}(r)^2 \leqslant \Lambda r \frac{d\mathrm{S}}{dr}, \qquad \Lambda = \frac{2\pi^2 k}{q-2-\sum_{1}^{q}\frac{1}{\omega_j}}$$

en supposant

$$q-2-\sum_{1}^{q}\frac{1}{\omega_j} > 0$$

et l'on peut employer la méthode de Dufresnoy comme au n° 58. On obtient ainsi les énoncés suivants en prenant $q = 5$, $\omega_j = 2$ ou $q = 3$, $\omega_j = 2$ et supposant la fonction holomorphe:

I. *Etant donnés cinq domaines Δ_j simplement connexes sur la sphère, limités par des courbes régulières, extérieurs les uns aux autres, il existe un nombre Ω_1 ne dépendant que des positions de ces domaines Δ_j, tel que les images sur la sphère des valeurs de toute fonction $\mathrm{Z} = \mathrm{f}(z) = c_0 + c_1 z + \ldots$ qui est méromorphe dans le cercle*

$$|z| < \frac{1+|c_0|^2}{|c_1|}\,\Omega_1\,,$$

couvrent à un seul feuillet l'un des cinq domaines Δ_j.

II. *Etant donnés dans le plan des Z trois domaines Δ_j simplement connexes extérieurs les uns aux autres et limités par des courbes régulières, il existe un nombre Ω_2 ne dépendant que des positions de ces domaines Δ_j, tel que la surface de Riemann décrite par les valeurs de toute fonction $\mathrm{Z} = \mathrm{f}(z) = c_0 + c_1 z + \ldots$ holomorphe pour*

$$|z| < \frac{1+|c_0|^2}{|c_1|}\,\Omega_2 \qquad (32)$$

possède un feuillet simple sur l'un au moins des trois domaines.

Ces théorèmes, dus à Dufresnoy (loc. cit. au n° 58), avaient été donnés antérieurement par Ahlfors (loc. cit. au n° 58), mais avec un plus grand nombre de domaines.

On pourrait évidemment supprimer des énoncés la restriction sur les frontières puisqu'on pourrait remplacer les domaines par d'autres plus grands les contenant.

Théorème de Bloch. — Soit $f(z)$ holomorphe pour $|z| < 1$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Donnons-nous trois domaines Δ_j extérieurs les uns aux autres dans le plan des Z et $\omega_j = 2$. La fonction

$$g(z) = f(z)\, e^{i\theta}\, \Lambda_2 \ , \qquad \theta \text{ réel} \ ,$$

est holomorphe dans le cercle de rayon 1, on a $g(0) = 0$ et $g'(0) = e^{i\theta}\, \Omega_2$, le cercle de convergence vérifie la condition (32); donc les valeurs de $g(z)$ couvrent à un feuillet l'un des trois domaines donnés. Les valeurs de $f(z)$ couvrent à un feuillet l'un des trois domaines déduits des A_j par l'homothétie rotation $\frac{e^{-i\theta}}{\Omega_2}\cdot$ On obtient l'énoncé suivant:

III. *Etant donnés trois domaines Δ_j simplement connexes, extérieurs les uns aux autres, il existe un nombre Ω_2' ne dépendant que de ces domaines, tel que si l'on fait une homothétie rotation $\Omega_2'\, e^{i\varphi}$, ou φ est arbitraire, ce qui donne trois domaines Δ_j', la surface de Riemann décrite par les valeurs* $\mathrm{Z} = \mathrm{f}(\mathrm{z})$ *d'une fonction* $\mathrm{f}(\mathrm{z})$ *holomorphe pour* $|\mathrm{z}| < 1$, *égale à 0 pour* $\mathrm{z} = 0$ *et de dérivée égale à 1 à l'origine, a un feuillet simple sur l'un au moins des domaines Δ_j'.*

La surface de Riemann décrite par $Z = f(z)$, $f'(0) = 1$, $f(z)$ holomorphe pour $|z| < 1$ contient donc notamment un cercle à un feuillet de rayon supérieur à une constante B. C'est le théorème de Bloch sous sa forme habituelle [46)]. Mais on voit en outre que, en supposant $f(0) = 0$ et en prenant pour les Δ_j trois cercles dont les centres sont les sommets d'un triangle équilatéral dont l'orthocentre est l'origine, on obtient un cercle de Bloch dont la distance du centre à l'origine est égale au rayon multiplié par un nombre donné supérieur à $\frac{\sqrt{3}}{2}$. De même, en prenant pour les Δ_j trois cercles dont les centres ont même argument, on a une propriété moins précise en ce qui concerne le rapport du rayon à la distance à l'origine, mais l'argument du centre peut être choisi arbitrairement. A chacune de ces configurations correspond une constante de Bloch qui reste à déterminer.

64. *Théorèmes du type de Schottky.*

Si $Z = f(z)$ est holomorphe pour $|z| < 1$ et s'il existe trois domaines Δ_1, Δ_2, Δ_3 ne contenant pas de disque simple de la surface de Riemann, il en est de même pour $f(z)$ dans le cercle $|z - z_0| < 1 - |z_0|$, $|z_0| < 1$. D'après l'énoncé II de Dufresnoy, on a

$$\frac{|f'(z_0)|}{1 + |f(z_0)|^2} < \frac{\Omega_2}{1 - |z_0|}.$$

Or, sur un rayon, arg z = const., on a

$$|f'(z)| \geqslant \frac{\partial |f(z)|}{\partial r}, \qquad z = |z|,$$

l'inégalité précédente entraîne

$$\frac{\frac{\partial}{\partial r}|f(z)|}{1 + |f(z)|^2} < \frac{\Omega_2}{1 - r},$$

et, en intégrant de 0 à r, on obtient

$$\text{Arctg}\,|f(z)| < \text{Arctg}\,|f(z_0)| - \Omega_2 \log(1 - r) + k\pi, \qquad |z| = r$$

où k est entier et augmente d'une unité chaque fois que

$$\text{Arctg}\,|f(z_0)| - \Omega_2 \log \frac{1}{1 - r}$$

passe par une valeur $\frac{\pi}{2} + h\pi$. Il s'ensuit que

IV. *Si* f (z) *est holomorphe pour* $|z| < 1$ *et si ses valeurs ne couvrent pas à un feuillet aucun des trois domaines* Δ_1, Δ_2, Δ_3 *extérieurs les uns aux autres, on a*

$$|f(z)| < \Lambda(|f(z_0)|, r),$$

la fonction Λ *dépendant des trois domaines; en outre, si* $|f(z_0)| < A$, *on a*

$$|f(z)| < \Lambda_1[A, r].$$

Ce théorème, prévu par Bloch, avait été démontré par Ahlfors avec quatre domaines.

65. *Autre théorème.*

Du théorème précédent, on peut déduire des théorèmes analogues généralisant le théorème de Schottky [47]. Le plus simple est le suivant qui contient le théorème de Schottky:

V. *Si* $\mathrm{A} > 1$ *et* $\mathrm{m} > 0$ *sont donnés, si* $\mathrm{f(z)}$ *est holomorphe pour* $|\mathrm{z}| < 1$ *et ne s'annule pas dans ce cercle, si* $|\mathrm{f}(0)| < \mathrm{A}$, *et si* $|\mathrm{f}'(\mathrm{z})| < \mathrm{m}$ *lorsque* $\mathrm{f(z)} = 1$, *on a pour* $|\mathrm{z}| < \frac{1}{4}$, $|\mathrm{f(z)}| < \Omega(\mathrm{A}, \mathrm{m})$.

Il est clair qu'en itérant la méthode, on aura une borne dans tout cercle $|z| \leqslant \rho < 1$.

Considérons un rayon arbitraire, $\arg z = \text{const.}$, et $|z| \leqslant \frac{1}{4}$. Ou bien sur ce rayon $|f(z)| < \mathrm{A}$, ou bien il existera sur ce rayon un point z_0 tel que $|f(z_0)| = \mathrm{A}$. Plaçons-nous dans ce second cas. La fonction

$$\mathrm{F}(\zeta) = f\left(z_0 + \frac{\zeta}{2}\right)$$

est holomorphe et non nulle pour $|\zeta| < 1$, on a $|\mathrm{F}(0)| = \mathrm{A}$ et $|\mathrm{F}'(\zeta_1)| < \frac{m}{2}$ lorsque $\mathrm{F}(\zeta_1) = 1$. Ecrivons

$$\mathrm{F}(\zeta) = \mathrm{A}\, e^{i\lambda}\, e^{g(\zeta)}\,, \qquad g(0) = 0\,, \qquad \lambda \text{ réel}\,.$$

Soit $\zeta = \mathrm{G(Z)}$ l'inverse de $\mathrm{Z} = g(\zeta)$, $|\zeta| < 1$. On a

$$\mathrm{F}'(\zeta) = \mathrm{F}(\zeta)\,\frac{1}{\mathrm{G}'(\mathrm{Z})}\,.$$

Une branche quelconque de $\mathrm{G(Z)}$ ne peut pas être holomorphe pour $|\mathrm{Z} - i\mu| < \mathrm{D}$ si μ est réel et si D est supérieur à $\mathrm{E} = \pi + \log \mathrm{A}$ et à une fonction convenable de m. Car l'équation $\mathrm{F}(\zeta) = 1$ équivaut à

$$\mathrm{Z} = (2\pi n - \lambda)\, i - \log \mathrm{A}\,,$$

où n est un entier arbitraire. Cette équation en Z a une racine Z_1 telle que $|\mathrm{Z}_1 - i\mu| < \mathrm{E}$. Une branche de $\mathrm{G(Z)}$ holomorphe pour $|Z - i\mu| < D$ serait encore univalente et de module moindre que 1 dans le cercle

$$|Z - Z_1| < D - E$$

donc

$$(D - E)\,|G'(Z_1)| < 1\,.$$

On aurait $F(\zeta_1) = 1$ et

$$|F'(\zeta_1)| > D - E$$

ce qui est impossible si $D > E + \frac{m}{2}$. Donc $g(\zeta)$, dont les valeurs ne peuvent pas couvrir à un feuillet trois cercles $|Z - i\mu| < D$ a son module borné en vertu du théorème IV; $F(\zeta)$ a son module borné, donc, dans ce second cas encore, $|f(z)|$ est borné sur le rayon considéré. Le théorème est démontré.

NOTES

44 Thèse. *Annales Ecole normale*, 1940.

45 Cette généralisation a été donnée d'abord par Ahlfors (*Acta Soc. Sc. Fennicoe*, 1933) par une autre méthode.

46 Voir Bloch, *Annales Fac. de Toulouse*, t. 17, 1925.

47 Voir Valiron, *Comptes Rendus*, t. 205, 1937.