Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 4 (1958)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SU UN ESEMPIO DI FUNZIONE CONTINUA SENZA DERIVATA

Autor: De Vito, Luciano

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-34639

zum Polygon fremd sind. $\overline{OP'}$ selbst liegt ausser O auch nicht darauf. Also gehört $\overline{OP'}$ bis auf O zum Teilgebiet G. Man fährt nun wie im ersten Falle weiter.

Damit ist gezeigt: Der Rand von G besteht aus Strecken, die auf dem ursprünglichen Polygon liegen. Diese Strecken bilden selbst ein geschlossenes Teilpolygon, weil sich an jeden Endpunkt einer Strecke wenigstens eine weitere anschliesst. Satz 3 ist bewiesen.

SU UN ESEMPIO DI FUNZIONE CONTINUA SENZA DERIVATA [1])

da Luciano DE VITO, Roma

(Reçu le 22 avril 1958)

..... Nel Suo articolo: « Sur un exemple de fonction continue sans dérivée », apparso su *L'enseignement mathématique*, tomo III, fascicolo 1, gennaio-marzo 1957, Ella dimostra che la funzione:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \left| 2^k x - \left[2^k x + \frac{1}{2} \right] \right| ,$$

ove $[y]$ è il più grande intero che non supera y, è continua e mai derivabile sull'asse x.

Credo sia di qualche interesse notare che la funzione $f(x)$ dell'elegante esempio da Lei portato non soltanto è continua, ma è anche uniformemente hölderiana con qualsiasi esponente di Hölder α, tale che $0 < \alpha < 1$. Si ha precisamente, per ogni coppia di punti x_1 e x_2 dell'asse reale:

$$| f(x_2) - f(x_1) | \leqslant \frac{2^{\alpha-1}}{1 - 2^{\alpha-1}} | x_2 - x_1 |^{\alpha} .$$

[1]) Da una lettera al Prof. Georges de Rham (29 luglio 1957).

E' infatti evidente che $\varphi(x) = \left| x - \left[x + \frac{1}{2}\right]\right|$ è hölderiana; per determinare il minimo coefficiente di Hölder relativo all'esponente α si procede nel modo seguente: si vede che $|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)|$ è maggiorato da $\frac{1}{2}$ ed inoltre $|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leqslant |x_2 - x_1|$; ne viene:

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| = |\varphi(x_2) - \varphi(x_1)|^{1-\alpha} |\varphi(x_2) - \varphi(x_1)|^{\alpha} \leqslant 2^{\alpha-1} |x_2 - x_1|^{\alpha}. \tag{1}$$

Poichè nella (1) sussiste il segno $=$ per $x_1 = 0$ e $x_2 = \frac{1}{2}$, si ha che $2^{\alpha-1}$ non può essere sostituita nella (1) con una costante più piccola.

Dalla (1) si trae:

$$|f(x_2) - f(x_1)| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} \left\{2^{-k} \varphi(2^k x_2) - 2^{-k} \varphi(2^k x_1)\right\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{\alpha k-k} |x_2 - x_1|^{\alpha} = \frac{2^{\alpha-1}}{1 - 2^{\alpha-1}} |x_2 - x_1|^{\alpha}.$$

Naturalmente, con analogo ragionamento, si prova anche che è hölderiana la funzione $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} \left| a^k x - \left[a^k x + \frac{1}{2}\right]\right|$ con a intero positivo pari e quindi, in particolare, quella costruita da B. L. Van der Waerden.

Analoghe considerazioni possono ripetersi per la funzione considerata da Weierstrass:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos(a^k x),$$

ove a è un intero dispari, b è tale che $0 < b < 1$ e $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$.

Tenendo presente che ogni funzione uniformemente hölderiana con esponente di Hölder $\alpha = 1$ (cioè lipschitziana) è assolutamente continua, l'osservazione che mi sono permesso di sottoporLe pone vieppiù in luce l'interesse della funzione da Lei costruita.....

N.B. — Rispondendo a questa lettera, il Prof. de Rham mi ha gentilmente comunicato le seguenti osservazioni. Con lo stesso metodo seguito per dimostrare la hölderianità di $f(x)$ con esponente di Hölder α, si può dimostrare quella della funzione $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \, \gamma(a^k x)$, ove γ è una funzione hölderiana con esponente di Hölder α, nell'ipotesi che le due serie: $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ e $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| |a|^{\alpha k}$ siano convergenti. Se si assume $a = 2$, $\gamma(x) = \left| x - \left[x + \frac{1}{2} \right] \right|$, $b_k \geqslant 0$ e se la successione $\{ b_k \, 2^k \}$ non è infinitesima per $k \to \infty$, la funzione $g(x)$ è sprovvista di derivata in ogni punto, come mostra il ragionamento dell'articolo sopra citato del Prof. de Rham. Se si assume inoltre $b_k = 2^{-k}$ si ottiene una funzione $g(x)$ hölderiana, come si prova con il ragionamento sopra esposto. Se si assume invece $b_k = \frac{1}{k^2}$, si ottiene una funzione $g(x)$ che è sprovvista di derivata (si ha infatti $\lim_{k \to \infty} \frac{2^k}{k^2} = \infty$) e che non è hölderiana, come segue dalla relazione:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{g(2^{-n}) - g(0)}{2^{-n\alpha}} = \lim_{n \to \infty} 2^{n\alpha - n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^k}{k^2} = \infty \qquad (0 < \alpha \leqslant 1) .$$