

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 4 (1958)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE FINI ET FONCTIONS MÉROMORPHES  
**Autor:** Valiron, Georges  
**Kapitel:** FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE FINI ET D'ORDRE NUL  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-34622>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE FINI ET FONCTIONS MÉROMORPHES \*

par Georges VALIRON †

## FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE FINI ET D'ORDRE NUL

### I. L'ORDRE DE LA FONCTION ET L'ORDRE DE SA DÉRIVÉE.

#### 1. *Rappel du théorème de Cauchy sur le module maximum.*

On suppose connu le théorème de Cauchy: si  $f(z)$  est holomorphe dans un domaine  $D$  et si  $C$  est une courbe simple fermée de  $D$ , rectifiable, dont l'intérieur appartient à  $D$ , on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{C} \frac{f(u)}{u - z} du .$$

On sait qu'on en déduit le développement de Taylor: si  $z_0$  est un point de  $D$ , on a

$$f(z) = \sum\limits_0^{\infty} a_n (z - z_0)^n , \quad a_n = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{C} \frac{f(u)}{(u - z)^{n+1}} du$$

$C$  étant une courbe entourant  $z_0$  et dont l'intérieur appartient à  $D$ . La série converge uniformément et absolument à l'intérieur du cercle de centre  $z_0$  tangent à la frontière de  $D$ .

En particulier, si  $f(z)$  est holomorphe pour  $|z| \leq r$ , c'est-à-dire dans un cercle  $|z| < r'$  avec  $r' > r$ , on a

$$f(z) = \sum\limits_0^{\infty} a_n z^n$$

\*) Série de cours et de conférences sur la théorie des fonctions entières, faits en 1948 au Caire et à Alexandrie, d'après le manuscrit revu et mis au point par le professeur Henri MILLOUX.

avec

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{|u|=r} \frac{f(u) du}{u^{n+1}},$$

et, en mettant en évidence les modules et arguments:

$$a_n = A_n e^{i\theta_n}, \quad u = r e^{i\theta}, \quad f(u) = B(r, \theta) e^{iC(r, \theta)}$$

on peut écrire

$$r^n A_n = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} B(r, \theta) e^{i[C(r, \theta) - \theta_n - n\theta]} i d\theta$$

ou, puisque  $A_n$  est réel:

$$r^n A_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B(r, \theta) \cos [C(r, \theta) - \theta_n - n\theta] d\theta. \quad (1)$$

Les fonctions  $B(r, \theta)$  et  $C(r, \theta)$  sont fonctions continues de  $\theta$ . Si  $M(r)$  désigne le maximum de  $B(r, \theta)$  lorsque  $\theta$  varie de 0 à  $2\pi$ , on déduit de (1)

$$A_n r^n \leq M(r). \quad (2)$$

Peut-on avoir l'égalité? Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit, eu égard à la continuité, que, quel que soit  $\theta$ ,

$$B(r, \theta) = M(r), \quad C(r, \theta) - \theta_n - n\theta = 2ik\pi, \quad k \text{ entier.}$$

S'il en est ainsi, on aura pour  $p \neq n$ ,

$$A_p r^p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(r) \cos (\theta_n - \theta_p + (n - p)\theta) d\theta = 0.$$

Par suite, l'inégalité (2) est effectivement une inégalité sauf si  $f(z)$  est un monôme:  $f(z) = a_p z^p$ .

En particulier, si  $f(z)$  ne se réduit pas à une constante pour  $|z| \leq r$ , on a  $|f(o)| < M(r)$ . Le maximum de  $|f(z)|$  est atteint sur le contour  $|z| = r$ . On déduit de là le théorème de Cauchy sur le module maximum:

THÉORÈME. — Si  $f(z)$  est holomorphe dans un domaine borné  $D$ , est continue dans  $D$  et sur sa frontière  $F$  et n'est pas une constante, le maximum de  $|f(z)|$  est atteint sur la frontière.

Car  $|f(z)|$  est continue dans  $D + F$ , donc a un maximum  $M$  qui est atteint en un point au moins de  $D + F$ . Si en un point  $z_0$  de  $D$  on avait  $|f(z_0)| = M$ ,  $f(z)$  serait constant dans le cercle  $C$  de centre  $z_0$  tangent à la frontière  $F$  et  $|f(z)| = M$ . En un point  $z_1$  de  $C$  on aurait encore  $|f(z_1)| = M$ , donc  $f(z)$  serait encore constant dans le cercle de centre  $z_1$  tangent à  $F$ , cette constante étant la même que dans  $C$ , et ainsi de suite.

COROLLAIRE. — Si  $f(z)$  est une fonction entière, donc

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n$$

la série étant convergente quel que soit  $z$  et si  $M(r) = \max |f(re^{i\theta})|$ ,  $M(r)$  est une fonction continue et croissante de  $r$ .

En outre, si  $f(z)$  n'est pas un polynôme, ce que nous supposons toujours lorsque nous parlerons de fonction entière, l'inégalité (2) montre que  $\frac{\log M(r)}{\log r}$  n'est pas borné et dépasse tout nombre donné dès que  $r$  est assez grand.

## 2. Théorème d'Hadamard sur la convexité de $\log M(r)$ .

Si l'on pose

$$X = \log r, \quad V(X) = \log M(r).$$

la fonction  $V(X)$  est continue et croissante. Hadamard a montré que c'est une fonction convexe. Pour le montrer, il suffit de prouver que  $X_1, X, X_2$  étant trois valeurs telles que  $X_1 < X < X_2$ , on a

$$V(X) - hX < V(X_1) - hX_1 \quad (3)$$

si  $h$  est défini par

$$V(X_1) - hX_1 = V(X_2) - hX_2. \quad (4)$$

Or,  $h$  étant ainsi défini, considérons la fonction

$$f(z) z^{-h}$$

qui, en général, n'est pas holomorphe dans la couronne  $e^{x_1} \leq |z| \leq e^{x_2}$ , mais qui est analytique et de module uniforme. Cette fonction n'est pas constante sans quoi  $f(z)$  serait un monôme, le maximum de son module est donc atteint sur la frontière. Donc, comme le module a la même valeur sur les deux cercles frontières :

$$\exp(V(X_1) - hX_1) = \exp(V(X_2) - hX_2),$$

le module en un point intérieur est inférieur au module sur la frontière, ce qui donne l'inégalité (3), moyennant (4).

*Conséquence.* — D'après les propriétés des fonctions convexes,  $V(X)$  a une dérivée à gauche et une dérivée à droite en chaque point  $X$ , ces dérivées étant croissantes. Prenons, par exemple, la dérivée à gauche de  $V(X)$ , soit  $w(X)$ , fonction qui peut avoir des discontinuités. On a

$$V(X) = \log |f(0)| + \int_{-\infty}^X w(u) du$$

(en supposant  $f(0) \neq 0$ ). En revenant à la fonction  $\log M(r)$ , ce qui se fait dans l'intégrale en posant  $u = \log t$ , on obtient

$$\log M(r) = \log |f(0)| + \int_0^r \varphi(t) \frac{dt}{t}, \quad f(0) \neq 0, \quad (5)$$

*la fonction  $\varphi(t) = w(u)$  étant croissante.* Si  $f(0) = 0$ , on peut prendre

$$\log M(r) = \log M(1) + \int_1^r \varphi(t) \frac{dt}{t}. \quad (6)$$

*Remarques.* — I. Ces égalités impliquent la convexité, puisque  $\varphi(t)$  est supposée croissante. Elles valent pourvu que  $f(z)$  soit holomorphe pour  $|z| \leq r$ .

II. La fonction  $\varphi(t)$  est indéfiniment croissante lorsque  $f(z)$  est une fonction entière.

III. Blumenthal a montré que  $\log M(r)$  est analytique par intervalles.

3. *Définition de l'ordre.*

Si  $f(z)$  est une fonction entière, on définit son *ordre* (qui est un ordre de croissance) par

$$\rho = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M(r)}{\log r} \quad (\log_2 U = \log(\log U)).$$

$\rho$  est un nombre non négatif, qui peut être nul, fini positif ou infini. Par exemple, l'ordre de  $e^{P(z)}$  où  $P(z)$  est un polynôme est égal au degré de ce polynôme, l'ordre de  $\exp(e^z)$  est infini.

On voit aisément que les fonctions

$$f(z), \quad f(z)z, \quad f(z) + P(z)$$

où  $f(z)$  est donnée et où  $P(z)$  est un polynôme arbitraire donné, ont le même ordre.

4. *Comparaison de l'ordre d'une fonction et de l'ordre de sa dérivée.*

Si  $f(z)$  est donnée, si  $M(r)$  est le maximum de son module, et  $M^1(r)$  le maximum du module de sa dérivée  $f'(z)$ , nous allons comparer les fonctions  $M(r)$  et  $M^1(r)$ .

Soit  $z_0$  un point du cercle  $|z| = R$  en lequel  $|f(z_0)| = M(R)$ , et soit  $z_1$  un point pris sur le rayon joignant l'origine au point  $z_0$ . On a, en intégrant le long du rayon,

$$f(z_0) = f(z_1) + \int_{z_0}^{z_1} f'(u) du$$

donc, si  $r = |z_1|$ ,

$$M(R) < M(r) + (R - r) M^1(R),$$

car  $M^1(r)$  est croissant. Par suite

$$M^1(R) > \frac{M(R) - M(r)}{R - r}.$$

Si  $r$  tend vers  $R$ , on obtient

$$M^1(R) \geq \frac{d M(R)}{d R},$$

la dérivée étant la dérivée à gauche. D'ailleurs  $M^1(R)$  étant continue, on peut aussi prendre la dérivée à droite. On a,

d'après (6),

$$\frac{1}{M(R)} \frac{d}{dR} M(R) = \frac{\varphi(R)}{R},$$

et, puisque  $\varphi(R)$  croît,

$$\log M(R) - \log M(1) < \varphi(R) \log R,$$

ce qui conduit aux inégalités

$$M^1(r) \geq \frac{M(r)}{r} \varphi(r), \quad (7)$$

et

$$M^1(r) > \frac{M(r)}{r} \frac{\log M(r) - \log M(1)}{\log r} - 1. \quad (8)$$

Pour obtenir une inégalité de sens contraire, nous utilisons l'intégrale de Cauchy. On a

$$f'(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C, \rightarrow} \frac{f(u)}{(u - z)^2} du.$$

Prenons  $z$ , de module  $r$ , tel que  $|f'(z)| = M^1(r)$ , et pour  $C$  un cercle de centre  $z$  et rayon  $R - r$ , ( $R > r$ ), donc  $|u - z| = R - r$ . Nous obtenons l'inégalité

$$M^1(r) < \frac{M(R)}{R - r} \quad (9)$$

qui n'est pas très précise puisque nous remplaçons sur tout  $C$ ,  $|f(u)|$  par  $M(R)$ . D'après (6), on a

$$\log M(R) = \log M(r) + \int_r^R \varphi(t) \frac{dt}{t}$$

donc

$$\log M^1(r) < \log M(r) + \log \frac{1}{R - r} + \int_r^R \varphi(t) \frac{dt}{t}, \quad R > r. \quad (10)$$

Le second membre est une fonction de  $R$  dont le minimum correspond à

$$\frac{\varphi(R)}{R} = \frac{1}{R - r}$$

ou

$$R = \frac{r}{1 - \frac{1}{\varphi(R)}}. \quad (11)$$

Le second membre de l'inégalité (11) est d'ailleurs inférieur à

$$\frac{r}{1 - \frac{1}{\varphi(r)}} = r(1 + o(1)).$$

De (10) on déduit

$$\log M^1(r) < \log M(r) + \log \frac{\varphi(R)}{R} + \varphi(R) \log \frac{R}{r},$$

donc, comme d'après (11)

$$\varphi(R) \log \frac{R}{r} = -\varphi(R) \log \left(1 - \frac{1}{\varphi(R)}\right) = 1 + o(1),$$

on arrive finalement à l'inégalité

$$M^1(r) < M(r) \frac{e \varphi(R')}{r} (1 + o(1)), \quad R' = \frac{r \varphi(r)}{\varphi(r) - 1} = r(1 + o(1)). \quad (12)$$

La présence du nombre  $e$  dans cette inégalité semble être imputable à la méthode, c'est-à-dire à l'emploi de l'inégalité (9) qui est trop grossière.

Les inégalités (7) et (9) fournissent ce premier résultat:

THÉORÈME. — *L'ordre de la dérivée d'une fonction entière est égal à l'ordre de cette fonction.*

Car, puisque  $\varphi(r)$  est indéfiniment croissant, (7) entraîne

$$M^1(r) > \frac{M(r)}{r}, \quad \text{si } r > r_0,$$

et si l'on prend  $R = 2r$  dans (9), on a

$$M^1(r) < \frac{M(2r)}{r}.$$

Ainsi

$$\log M(r) - \log r < \log M^1(r) < \log M(2r) - \log r,$$

et puisque le quotient  $\log M(r) : \log r$  finit par dépasser tout

nombre donné, on a

$$(1 - 0(1)) \log M(r) < \log M^1(r) < \log M(2r),$$

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M(r)}{\log r} \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M^1(r)}{\log r} \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M(2r)}{\log 2r}.$$

(puisque  $(\log 2r) : \log r$  tend vers un). Ceci démontre le théorème.

### 5. Cas des fonctions d'ordre fini.

Si  $f(z)$  est d'ordre fini  $\rho$ , on a, d'après la définition de l'ordre, si petit que soit  $\varepsilon > 0$ ,

$$\log M(r) < r^{\rho+\varepsilon} \quad \text{si } r > r(\varepsilon),$$

et si  $\rho > 0$ ,

$$\log M(r_p) > r_p^{\rho-\varepsilon} \quad \text{pour } r_{p+1} > r_p, \quad \lim r_p = \infty.$$

On déduit de là des inégalités analogues pour la dérivée  $\nu(r)$ . En effet, si  $R > r$ ,

$$\nu(r) \log \frac{R}{r} < \int_r^R \nu(t) \frac{dt}{t} < \log M(R) < R^{\rho+\varepsilon}$$

et en prenant  $R = 2r$ , et  $r$  assez grand,

$$\nu(r) < \frac{(2r)^{\rho+\varepsilon}}{\log 2} < r^{\rho+2\varepsilon}$$

et puisque  $\varepsilon$  est arbitrairement petit, on a encore

$$\nu(r) < r^{\rho+\varepsilon} \quad r > r'(\varepsilon).$$

D'autre part, si  $\rho > 0$ , il existe une suite de valeurs  $r'_1, r'_2, r'_q, \dots$  tendant vers l'infini, pour lesquelles  $\nu(r) > r^{\rho-\varepsilon}$ . Car si, à partir d'une valeur de  $r$ , soit  $r'$ , on avait  $\nu(r) \leq r^{\rho-\varepsilon}$ , on aurait

$$\log M(r) < \log M(r'_0) + \int_{r'_0}^r t^{\rho-1-\varepsilon} dt = \log M(r'_0) + \frac{r^{\rho-\varepsilon} - r'^{\rho-\varepsilon}}{\rho - \varepsilon}.$$

L'ordre serait au plus  $\rho - \varepsilon$ . Ainsi, si l'ordre est  $\rho$ , l'ordre de  $\nu(r)$  est aussi  $\rho$ , ce qu'on peut écrire

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \nu(r)}{\log r} = \rho = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M(r)}{\log r}.$$

Inversement, on voit de suite que, si  $\varphi(r)$  est d'ordre  $\rho$ ,  $f(z)$  est aussi d'ordre  $\rho$ , et le résultat vaut aussi pour  $\rho$  infini.

Utilisons alors les inégalités (7) et (12). Si petit que soit  $\varepsilon$  positif, on aura pour  $r = r'_p$

$$M^1(r) > M(r) r^{\rho-\varepsilon-1}$$

et pour  $r > r'(\varepsilon)$ ,

$$M^1(r) < M(r) r^{\rho+\varepsilon-1} e(1 + o(1)) < M(r) r^{\rho+2\varepsilon-1} \quad (13)$$

si  $r$  est assez grand. On déduit de ces deux inégalités que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M_1(r) - \log M(r)}{\log r} = \rho - 1. \quad (14)$$

D'autre part, (7) et (13) donnent *a fortiori*,

$$\frac{M(r)}{r} < M^1(r) < M(r) r^{\rho+\varepsilon-1}$$

dès que  $r$  est assez grand. Par suite, puisque  $\frac{\log r}{\log M(r)}$  tend vers zéro,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M^1(r)}{\log M(r)} = 1. \quad (15)$$

*Pour toute fonction entière d'ordre fini,  $\log M(r)$  et  $\log M^1(r)$  sont asymptotiquement équivalents.*

*Ordre inférieur.* — L'ordre inférieur  $\lambda$  d'une fonction entière est défini par

$$\lambda = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M(r)}{\log r}.$$

D'après (15), l'ordre inférieur d'une fonction d'ordre fini est le même que celui de sa dérivée. D'après (7), et (9) où l'on prend  $R = 2r$ , il en est encore de même si l'ordre est infini.

L'inégalité (13) montre que, si  $f(z)$  est d'ordre  $\rho$  inférieur à 1, on a, à partir d'une valeur de  $r$ ,  $M^1(r) < M(r)$  puisque  $\rho + 2\varepsilon - 1$  est négatif si  $\varepsilon$  est pris assez petit. Donc, puisque l'ordre se conserve dans la dérivation, on a, si  $m$  est donné et si  $M^m(r)$  désigne le maximum de  $|f^{(m)}(z)|$  pour  $|z| = r$ ,

$$M(r) > M^1(r) > \dots > M^m(r) \quad \text{si } \rho < 1 \quad \text{et } r > r_0(m, f).$$

De même, l'inégalité (8) et la conservation de l'ordre inférieur dans la dérivation, montrent que, pour une fonction d'ordre inférieur  $\lambda$  supérieur à 1, on a

$$M(r) < M^1(r) < \dots < M^m(r) \quad \text{si } r > r_0(m, f) .^2)$$

### 6. Notion d'ordre précisé L.

On a cherché à préciser la notion d'ordre afin d'obtenir des résultats plus serrés. Lindelöf a employé comme fonctions de comparaison de  $\log M(r)$  les fonctions  $r^\rho$ ,  $r^\rho (\log r)^{\rho_1}$ ,  $r^\rho (\log r)^{\rho_1} (\log_2 r)^{\rho_2}$ , etc., où  $\rho$  est positif. Mais ces fonctions ne permettent pas d'approcher de façon également précise de toute fonction jouissant des propriétés de croissance de  $\log M(r)$ . Pour obtenir dans tous les cas d'ordre fini des résultats comparables, on peut introduire la notion *d'ordre précisé L*.

Si  $f(z)$  est une fonction entière d'ordre fini positif  $\rho$ ,  $M(r)$  son module maximum, on peut définir une fonction  $\rho(r)$  jouissant des propriétés suivantes:  $\rho(r)$  définie pour  $r > 0$  est continue, dérivable à droite et à gauche de chaque point et l'on a

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \rho'(r) r \log r = 0,$$

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{U(r)} = 1 \quad \text{avec} \quad U(r) = r^{\rho(r)}.$$

$\rho(r)$  sera un ordre précisé L.

Les deux premières propriétés permettent de calculer asymptotiquement les intégrales portant sur  $U(r)$  et ses puissances comme si  $\rho(r)$  était constant et égal à  $\rho$ . C'est une conséquence du fait que

$$\frac{r U'(r)}{U(r)} = \rho(r) + \rho'(r) r \log r \rightarrow \rho \quad (16)$$

donc, si  $k > 1$  est donné

$$\log U(kr) - \log U(r) = \int_r^{kr} \frac{U'(x)}{U(x)} dx = \int_r^{kr} (\rho + o(1)) \frac{dx}{x} = (\rho + o(1)) \log k,$$

ou

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{U(kr)}{U(r)} = k^\rho.$$

Il suffit de montrer qu'on peut construire  $\rho(r)$ . A cet effet, définissons une suite de nombres  $r_p$  tels que  $r_1 > 25$ , puis

$$\log M(r_p) = \log M(r_{p-1}) \left(1 + \frac{1}{p}\right), \quad p = 2, 3, \dots \quad (17)$$

On a  $\lim_{p \rightarrow \infty} r_p = \infty$ . Soit  $\beta$  un nombre compris entre 0 et  $\rho$ . Pour  $r \leq r_1$  nous prenons  $\rho(r) = \rho(r_1)$ . Pour  $r \geq r_1$  nous prenons pour  $\rho(r)$  le plus grand des nombres  $\beta$  et

$$y_\rho(r) = \begin{cases} \frac{\log_2 M(r_p)}{\log r_p} + \log_3 r - \log_3 r_p & \text{si } r_p \geq r, \\ \frac{\log_2 M(r_p)}{\log r_p} - \log_3 r + \log_3 r_p & \text{si } r_p \leq r. \end{cases}$$

Les seconds de ces nombres sont en nombre fini; il y a une infinité de nombres de la première ligne, mais puisque  $[\log_2 M(r_p)]/\log r_p$  a pour limite supérieure  $\rho$  et puisque  $-\log_3 r_p$  tend vers  $-\infty$ , il n'y a qu'un nombre fini de ces nombres qui sont supérieurs ou égaux à  $\beta$ . Le maximum existe donc. En outre, si  $\rho(r) = y_p(r)$  avec  $r_p \geq r$ , on a encore  $\rho(r) = y_p(r)$  entre  $r$  et  $r_p$ ; si  $\rho(r) = y_p(r)$  avec  $r_p < r$ , on a encore  $\rho(r) = y_p(r)$  entre  $r_{p-1}$  et  $r$ . Par suite  $\rho(r)$  coïncide successivement avec des  $y_p(r)$  ou avec  $\beta$ , et  $\rho(r_p) = y_p(r_p)$  pour une suite infinie de valeurs  $r_p$ . Ces considérations peuvent être rendues intuitives si l'on représente géométriquement les fonctions  $y_p(r)$ .

On a donc

$$\rho'(r) = \pm \frac{1}{r \log r \log_2 r} \quad \text{ou} = 0,$$

donc  $r\rho'(r) \log r$  tend bien vers 0. En outre, d'après (16), il suffit de prendre  $r_1$  tel que

$$\beta - \frac{1}{\log_2 r_1} > 0$$

pour que  $U'(r)$  soit toujours positif, donc  $U(r)$  croissant. Pour tout  $r_p$  on a

$$\rho(r_p) \geq \frac{\log_2 M(r_p)}{\log r_p}$$

ou

$$U(r_p) \geq \log M(r_p),$$

l'égalité valant pour une suite infinie de valeurs  $p$ . Pour  $r_p < r < r_{p+1}$ , on a, puisque  $U(r)$  croît

$$U(r) > U(r_p) \geq \log M(r_p) = \frac{\log M(r_{p+1})}{1 + \frac{1}{p}} > \frac{\log M(r)}{1 + \frac{1}{p}} ;$$

il s'ensuit bien que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{U(r)} = 1 .$$

Toutes les conditions imposées à  $\rho(r)$  sont ainsi vérifiées sauf une seule. La fonction  $\rho(r)$  ainsi construite ne tend pas nécessairement vers  $\rho$ . Si  $\rho(r)$  ne tend pas vers  $\rho$ , on la remplace pour chaque  $r$  par la plus grande des valeurs de  $\rho(r)$  et d'une fonction croissante constante par intervalles tendant vers  $\rho$  (par valeurs inférieures à  $\rho$ ) et assez lentement pour que  $\rho(r)$  reste égal à  $\frac{\log_2 M(r)}{\log r}$  pour une suite infinie de valeurs  $r_p$ . Ceci montre aussi, en utilisant aussi une fonction décroissante constante par intervalles et tendant vers  $\rho$ , lorsque  $\rho(r)$  primitivement construite reste supérieure à  $\rho$  dans une infinité d'intervalles, que l'on peut obtenir *un ordre précis*  $\rho(r)$  qui soit monotone (au sens large) à partir d'une valeur de  $r$ .

### 7. *Emploi de l'ordre précis dans l'étude de la relation entre $M(r)$ et $M^1(r)$ .*

Si  $\rho(r)$  est un ordre précis  $L$  pour  $f(z)$ , c'est aussi un ordre précis  $L$  pour  $f'(z)$  et inversement. C'est une conséquence immédiate de l'équivalence asymptotique

$$\log M_1(r) \sim \log M(r) .$$

Si  $\rho(r)$  est ordre précis  $L$  de  $f(z)$  et  $\nu(r)$  la dérivée définie par la formule (6), si petit que soit  $\varepsilon$  positif, il existe une suite de valeurs  $r_p$  tendant vers l'infini telles que

$$\nu(r) > (1 - \varepsilon) \rho r^{\rho(r)} , \quad r = r_p . \quad (18)$$

Sinon, on aurait à partir d'une valeur  $r_0$  de  $r$ ,

$$\nu(r) \leq (1 - \varepsilon) \rho r^{\rho(r)} ,$$

donc, pour  $r > r_0$

$$\log M(r) < \log M(r_0) + \int_{r_0}^r (1 - \varepsilon) \rho t^{\rho(t)-1} dt.$$

Or

$$U'(t) \sim U(t) \frac{\rho}{t},$$

donc, si  $r_0$  est assez grand, on a

$$\rho t^{\rho(t)-1} = (1 + \eta) U'(t), \quad |\eta| < \frac{\varepsilon}{2},$$

et par suite

$$\int_{r_0}^r \rho t^{\rho(t)-1} dt < [U(r) - U(r_0)] \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

ce qui donnerait

$$\log M(r) < \log M(r_0) - (1 - \varepsilon) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) U(r_0) + (1 - \varepsilon) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) U(r)$$

et entraînerait

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{U(r)} \leq (1 - \varepsilon) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) < 1.$$

Ainsi (18) est vérifiée et l'inégalité (7) montre que, pour une suite infinie de valeurs tendant vers l'infini, on a,

$$M^1(r) > M(r) (1 - \varepsilon) \rho r^{\rho(r)-1}.$$

Autrement dit,

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{M^1(r)}{M(r) \rho r^{\rho(r)-1}} \geq 1. \quad (19)$$

La limitation obtenue dans l'autre sens est moins bonne. Tout d'abord, on a

$$\varphi(r) \log k < \int_r^{kr} \varphi(t) \frac{dt}{t} < \log M(kr) < (1 + \varepsilon) r^{\rho(r)} k^\rho$$

d'après les propriétés de  $\rho(r)$ . Donc

$$\varphi(r) < (1 + \varepsilon) \frac{k^\rho}{\log k} r^{\rho(r)}.$$

Comme le minimum de  $k^\rho$ :  $\log k$  est  $\rho e$ , on voit que

$$\varphi(r) < (1 + \varepsilon) \rho e U(r), \quad U(r) = r^{\rho(r)}. \quad (20)$$

Cette inégalité, où  $\varepsilon$  est arbitrairement petit, vaut à partir d'une valeur de  $r$ . On a d'ailleurs aussi pour une suite de valeurs  $r_q$  tendant vers l'infini

$$\varphi(r) < (1 + \varepsilon) \rho U(r).$$

Car, si l'on avait  $\varphi(r) > (1 + \varepsilon) \rho U(r) \sim (1 + \varepsilon) r U'(r)$  à partir d'une valeur de  $r$ , l'intégration immédiate de (6) montrerait que  $\varphi(r)$  n'est pas un ordre précisé L.

Portant la valeur (20) dans l'inégalité (12) et utilisant la propriété de  $U(kr)$ , on voit que

$$M^1(r) < M(r) e^2 \rho r^{\rho(r)} (1 + o(1)). \quad (21)$$

La présence du facteur  $e^2$  introduit par la méthode ne semble pas s'imposer.

### 8. Cas des fonctions à croissance régulière de Borel.

Les fonctions d'ordre fini  $\rho$  positif, régulières au sens de Borel, sont les fonctions pour lesquelles l'ordre inférieur  $\lambda$  est égal à l'ordre  $\rho$ . On a donc

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M(r)}{\log r} = \rho.$$

L'inégalité (8) donne alors, si petit que soit  $\varepsilon > 0$ , si  $r$  est assez grand,

$$M^1(r) > \frac{M(r)}{r} \frac{r^{\rho-\varepsilon}}{\log r} > M(r) r^{\rho-2\varepsilon-1}.$$

En rapprochant ce résultat de l'inégalité (13), on voit que, pour ces fonctions,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M^1(r) - \log M(r)}{\log r} = \rho - 1. \quad (22)$$

On peut observer que, dans ce cas, la fonction  $\varphi(r)$  est aussi à croissance régulière. Car on a

$$\log M(r) - \log M(1) < \varphi(r) \log r,$$

donc, pour  $r$  assez grand,

$$\varphi(r) > \frac{r^{\rho-\varepsilon}}{\log r} > r^{\rho-2\varepsilon}.$$

En rapprochant du résultat du n° 5, on obtient

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \varphi(r)}{\log r} = \rho.$$

9. *Fonctions à croissance parfaitement régulière par rapport à un ordre précisé  $L$ .*

On dira que la fonction  $f(z)$  est à croissance parfaitement régulière par rapport à un ordre précisé  $\rho(r)$  lorsque

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{U(r)} = 1, \quad U(r) = r^{\rho(r)}. \quad (23)$$

Dans ces conditions, on a l'égalité asymptotique

$$\int_0^r \varphi(t) \frac{dt}{t} \sim r^{\rho(r)}.$$

Cette égalité peut être dérivée comme si  $\rho(r)$  était constant et  $\sim$  remplacé par  $=$ . C'est-à-dire que l'on a

$$\varphi(r) \sim \rho r^{\rho(r)}. \quad (24)$$

En effet, en prenant  $k$  fini, on a

$$\varphi(r) \log k < \int_r^{kr} \varphi(t) \frac{dt}{t} = \log M(kr) - \log M(r) < \varphi(kr) \log k$$

et le membre intermédiaire est égal à

$$(1 + \eta) r^{\rho(r)} k^\rho - (1 + \eta') r^{\rho(r)},$$

$|\eta|$  et  $|\eta'|$  étant moindres que  $\varepsilon$  arbitrairement petit positif si  $r$  est assez grand. Cette différence peut s'écrire

$$(1 + \eta) r^{\rho(r)} (k^\rho - 1) + \eta'' r^{\rho(r)}, \quad |\eta''| < 2\varepsilon.$$

On obtient ainsi

$$\varphi(r) < (1 + \eta) r^{\rho(r)} \frac{k^\rho - 1}{\log k} + \frac{\eta''}{\log k} r^{\rho(r)} < \varphi(kr).$$

Si  $k = 1 + \delta$  et si  $\delta$  tend vers zéro

$$\frac{k^\rho - 1}{\log k} = \frac{(1 + \delta)^\rho - 1}{\log(1 + \delta)} = \rho + O(1) \delta$$

tend vers  $\rho$ . Prenons donc cette valeur  $1 + \delta$  pour  $k$ ,  $\delta$  étant très petit, puis  $r$  tel que  $\varepsilon < \delta^2$ . Nous aurons

$$\varphi(r) < \rho r^{\rho(r)} (1 + o(1)) < \varphi(r(1 + o(1))) ,$$

ce qui démontre (24).

L'inégalité (7) donne alors

$$M^1(r) > M(r) \rho r^{\rho(r)-1} (1 - o(1)) \quad (25)$$

tandis que l'inégalité (12) conduit seulement à

$$M^1(r) < M(r) \rho e^{r^{\rho(r)-1}} (1 + o(1)) . \quad (26)$$

On peut tenter d'améliorer ce dernier résultat en remplaçant (9) par une inégalité plus précise. La formule de Cauchy du n° 4 donne en réalité

$$M^1(r) < \frac{1}{2\pi(R-r)} \int_0^{2\pi} M(r + (R-r)\cos\theta) d\theta$$

et l'on a

$$\log M(r + (R-r)\cos\theta) = \log M(r) + \int_r^{r+(R-r)\cos\theta} \frac{\varphi(t) dt}{t} .$$

En prenant

$$R-r = \frac{r}{\rho U(r)}$$

et utilisant (24) et les propriétés de  $U(r)$ , on trouverait que dans (26) on peut remplacer  $e$  par

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} d\theta$$

ce qui est encore insuffisant. En réalité, la méthode basée sur l'étude de  $f(z)$  et  $f'(z)$  dans le voisinage des points de module maximum (voir *Lectures on the general theory of integral functions*,

chapter IV) montre que

$$M^1(r) \sim M(r) \rho r^{\rho(r)-1}$$

sauf sur une suite de segments exceptionnels dans lesquels la variation totale de  $\log r$  est finie. On peut présumer que cette égalité asymptotique vaut sans restrictions.

#### 10. *Le cas des fonctions d'ordre nul.*

La comparaison de  $\log M(r)$  à une fonction croissant moins vite que  $r^\varepsilon$ , si petit que soit  $\varepsilon$ , conduit à distinguer une infinité de classes de fonctions d'ordre nul si l'on veut obtenir la même approximation que pour les fonctions d'ordre fini d'ordre précisé  $\rho(r)$  donné. Mais on pourrait se borner à chercher des fonctions de comparaison, soient  $r^{\rho(r)}$ , avec  $\lim \rho(r) = 0$  qui permettraient de résoudre à un facteur fini près et non plus à un facteur près tendant vers un les égalités asymptotiques

$$\int_0^r \rho(t) \frac{dt}{t} \sim r^{\rho(r)}.$$

On pourra se reporter pour ce sujet à mon article « Sur les directions de Borel des fonctions entières d'ordre nul » (*Bull. sciences math.*, 1935).

Nous nous bornerons à considérer ici la classe des fonctions entières pour lesquelles

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M(r)}{\log_2 r} = k, \quad 1 < k < \infty. \quad (27)$$

On peut comparer ici la fonction  $\log M(r)$  à  $(\log r)^k$ , ou en posant  $\log r = X$ ,  $\log M(r) = V(X)$ , comparer  $V(X)$  à  $X^k$ . On pourra définir un ordre précisé. Comme la convexité de  $V(X)$  n'a pas été utilisée, on peut transposer ce qui a été fait au n° 6. On peut trouver  $k(X)$  telle que

$$\overline{\lim}_{X \rightarrow \infty} k(X) = k, \quad \lim_{X \rightarrow \infty} k'(X) X \log X = 0,$$

$$\overline{\lim}_{X \rightarrow \infty} \frac{V(X)}{X^{k(X)}} = 1.$$

On a

$$V(X) = \log M(r) = C + \int_1^x \omega(u) du$$

C étant une constante et  $\omega(u) = \varphi(t)$  si  $u = \log t$ . L'intégrale peut s'écrire

$$\int_1^x u \omega(u) \frac{du}{u}$$

et  $u\omega(u)$  sera croissante. On aura

$$X \omega(X) < [1 + 0(1)] k e X^{k(x)}$$

donc

$$\omega(X) = \varphi(r) < [1 + 0(1)] k e X^{k(x)-1}.$$

Il existe d'ailleurs une suite de valeurs indéfiniment croissantes de X pour lesquelles

$$\omega(X) > [1 - 0(1)] k X^{k(x)-1}.$$

Sil y a croissance parfaitement régulière, donc si

$$V(X) \sim X^{k(x)},$$

on a

$$\omega(X) \sim k X^{k(x)-1}.$$

On déduira de là des inégalités entre  $M(r)$  et  $M^1(r)$  analogues à celles relatives à l'ordre positif.

#### NOTES

1) Voir VIJAYARAGHAVAN, T., On derivatives of integral functions. *J. London Math. Soc.*, **10**, pp. 116-117 (1935).

2) Voir BOSE, S. K., On the derivatives of integral functions. *Indian math. Soc.*, **10**, nouvelle série, pp. 77-80 (1946), et VALIRON, G., Sur le théorème de M. Picard. *L'Enseignement mathématique*, **28**, pp. 55-59 (1929).