**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 4 (1958)

**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE FINI ET FONCTIONS MÉROMORPHES

**Autor:** Valiron, Georges

**Kapitel:** IV. Caractéristique de Shimizu-Ahlfors. Fonction L (r).

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-34637

Si $|h| < |g|$ le $\log^+$ dans $m(r, \infty)$ est nul; si $|h| > |g|$ le $\log^+$ est égal à $\log\left|\frac{h}{g}\right| = \log|h| - \log|g|$. Par suite, on a

$$T(r, f) = \log|c_q| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \lambda(re^{i\varphi})\, d\varphi \ ,$$

$\lambda(z)$ étant le plus grand des deux nombres $|h(z)|$ et $|g(z)|$.

## IV. Caractéristique de Shimizu-Ahlfors. Fonction L $(r)$.

47. *Aire couverte par les valeurs de* f (z).

Considérons la fonction $Z = f(z)$ méromorphe pour $|z| \leqslant r$ et représentons les points Z sur la sphère de diamètre 1 déjà envisagée au nº 42. Lorsque $z$ parcourt le cercle $|z| \leqslant r$, le point Z décrit une surface de Riemann transposée sur la sphère, c'est en général une surface à plusieurs feuillets. Nous appellerons $\pi S(r)$ l'aire totale de ces feuillets. On a vu que, à l'élément d'aire $dX\, dY$ du plan des X, Y ($Z = X + iY$) correspond sur la sphère un élément d'aire

$$d\omega = \frac{dX\, dY}{(1 + |Z|^2)^2} \ .$$

D'autre part, à l'élément d'aire $tdtd\varphi$ du point $te^{i\varphi}$ du plan $z$, la fonction $Z = f(z)$ fait correspondre l'élément d'aire

$$dX\, dY = |f'(z)|^2\, t\, dt\, d\varphi \ .$$

On a donc, sur la sphère,

$$d\omega = \frac{|f'(z)|^2}{(1 + |f(z)|^2)^2}\, td\, td\varphi$$

et

$$\pi S(r) = \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{|f'(te^{i\varphi})|^2}{(1 + |f(te^{i\varphi})|^2)^2}\, t\, dt\, d\varphi \ . \qquad (1)$$

Le second membre peut s'écrire autrement; $n(r, Z)$ est le nombre des feuillets de la surface de Riemann sphérique qui recouvrent l'image de Z. On a donc aussi

$$\pi S(r) = \int\int_{\Sigma} n(r, Z)\, d\omega_Z \tag{2}$$

$d\omega_Z$ étant l'élément d'aire de la sphère $\Sigma$ au point image de Z. En remplaçant $r$ par $t \leqslant r$, divisant par $t$ et intégrant de 0 à $r$, on obtient

$$\int_0^r \frac{S(t)}{t}\, dt = \frac{1}{\pi}\int\int_{\Sigma} N(r, Z)\, d\omega_Z$$

et d'après le théorème de Shimizu du n° 42, cette quantité est égale à la fonction T $(r, f)$ à une constante additive près qui est bornée quel que soit $r$. Il est donc loisible de prendre comme fonction caractéristique, à la place de T $(r, f)$ la fonction

$$\int_0^r \frac{S(t)}{t}\, dt$$

dont la dérivée donnée par (1) ou (2) a une interprétation géométrique simple. C'est ce qui avait été proposé par Bloch et a été utilisé systématiquement par Shimizu et Ahlfors [43)].

## 48. *Fonction* L (r).

Lorsque le point $z$ décrit la circonférence $|z| = r$, l'image sphérique de $Z = f(z)$ décrit une courbe $\Gamma = \Gamma_r$, qui est la frontière de la surface de Riemann décrite par Z et dont l'aire est $\pi S(r)$. Ahlfors a introduit, à côté de la fonction $S(r)$, la longueur $L(r)$ de cette courbe $\Gamma_r$. A l'élément d'arc $rd\varphi$ de la circonférence $C_r$, $|z| = r$, la transformation $Z = f(z)$ fait correspondre l'élément $|f'(re^{i\varphi})|\, rd\varphi$ et l'on a sur la sphère un élément

$$\frac{|f'(re^{i\varphi})|\, rd\varphi}{1 + |f(re^{i\varphi})|^2}\,.$$

Par conséquent,

$$L(r) = \int_0^{2\pi} \frac{|f'(re^{i\varphi})|\, rd\varphi}{1 + |f(re^{i\varphi})|^2}\,. \tag{3}$$

49. *Inégalité fondamentale.*

D'après l'égalité (1), on a

$$\frac{dS}{dr} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f'(re^{i\varphi})|^2}{(1+|f(re^{i\varphi})|^2)^2} r d\varphi \tag{4}$$

et, en appliquant l'inégalité de Schwarz à l'intégrale (3), et tenant compte de (4)

$$L(r)^2 \leqslant \pi \frac{dS}{dr} 2\pi r .$$

Ainsi

$$L(r)^2 \leqslant 2\pi^2 r \frac{dS}{dr} . \tag{5}$$

On déduit de cette inégalité que, si le point à l'infini est point essentiel, L $(r)$ est en général infiniment petit par rapport à S $(r)$. Car, admettant toujours, comme au n° 43, le théorème de Picard, T $(r, f)$/logr n'est pas borné, donc S $(r)$ n'est pas bornée. Si S $(r)$ n'est pas borné, et si l'on suppose que dans certains intervalles, pour lesquels $r > r_0$, on a

$$L(r) > S(r)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \quad , \qquad \varepsilon > 0 ,$$

on a, dans ces intervalles, $d$,

$$\frac{dr}{r} \leqslant 2\pi^2 \frac{dS}{S^{1+2\varepsilon}} ,$$

$$\int_d \frac{dr}{r} \leqslant \frac{2\pi^2}{2\varepsilon S(r_0)^{2\varepsilon}}$$

la variation totale de logr dans ces intervalles est finie. Ainsi, à l'extérieur d'intervalles dans lesquels la variation totale de logr est finie, on a

$$L(r) < S(r)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \quad , \qquad \varepsilon > 0 .$$

*(A suivre).*