Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 4 (1958)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE FINI ET FONCTIONS MÉROMORPHES

Autor: Valiron, Georges

Kapitel: III. Caractéristique de Nevanlinna ET PROPRIÉTÉ DE N (r, Z).

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-34637

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'étude de la division du plan des z en domaines complets d'univalence pour une fonction méromorphe générale $Z = f(z)$ a été l'objet de travaux de Shimizu [25] et de Marty. Elle demande de nouveaux efforts.

39. *Remarque sur les surfaces du type hyperbolique.*

Si l'on considère une fonction $Z = f(z)$ méromorphe pour $|z| < 1$ et admettant la circonférence $|z| = 1$ comme coupure, sa fonction inverse est uniforme sur une surface du type hyperbolique dont l'étude des singularités est peu avancée. Les valeurs asymptotiques sont ici les valeurs limites sur des chemins tendant vers la circonférence C, $|z| = 1$. Les considérations du n° 34 s'étendent, les singularités de la fonction inverse autres que les singularités algébriques sont fournies par les valeurs asymptotiques. Le théorème d'Iversen n'est plus valable en général non plus que le théorème de Gross dont la démonstration tombe évidemment en défaut.

La fonction spéciale étudiée au n° 31 rentre dans la classe générale des fonctions holomorphes et non bornées pour $|z| > 1$ telles que chaque $F(z)$ est bornée sur un chemin simple $L = L(F)$, $z = z(t; F)$, $t \geqslant 0$ avec $\lim\limits_{t=\infty} |z(t, F)| = 1$, tout point de $|z| = 1$ étant point limite des valeurs $z(t, F)$. Le théorème d'Iversen s'étend à ces fonctions. Lorsqu'on suppose que sur $L(F)$ l'une des limites d'indétermination de $z(t)$ pour t infini est infinie, on a

$$\overline{\lim_{r\to 1}} \frac{\log_3 M(r, F)}{\log \dfrac{1}{1-r}} \geqslant 1 .$$

la croissance est très rapide.

III. Caractéristique de Nevanlinna et propriété de $N(r, Z)$.

40. *Fonction* T (r, f) *de Nevanlinna.*

On a vu (n° 18) que, si $f(z)$ est méromorphe pour $|z| \leqslant r$, si $f(0) \neq 0, \infty$ et si $n(x)$ désigne le nombre des zéros et $p(x)$ le nombre des pôles pour $|z| \leqslant x$, on a

$$\int_0^r \frac{n(x)\,dx}{x} - \int_0^r \frac{p(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi - \log\left|f(0)\right| .$$

Si $f(0)$ est nul ou infini, on peut appliquer la formule à $\frac{f(z)}{z^q}$ si q est l'ordre du zéro à l'origine, à $f(z)\,z^q$ si l'on a un pôle d'ordre q, de sorte que, en désignant par c_q la limite pour $z = 0$ de $f(z)/z^q$ ou de $f(z)\,z^q$, on a

$$\int_0^r \frac{n(x) - n(0)}{x}\,dx - \int_0^r \frac{p(r) - p(0)}{x}\,dx \pm q \log r = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi - \log\left|c_q\right| .$$

On a $q = n(0)$ et le signe $+$ si l'origine est zéro, $q = p(0)$ et le signe $-$ si l'origine est pôle. Par suite, si l'on désigne d'une façon générale par $n(x, \mathrm{Z})$ le nombre des zéros de $f(z) - \mathrm{Z}$ pour $|z| \leqslant x$, et si l'on pose

$$\mathrm{N}(r, \mathrm{Z}) = \int_0^r \frac{n(x, \mathrm{Z}) - n(0, \mathrm{Z})}{x}\,dx + n(0, \mathrm{Z}) \log r ,$$

on a

$$\mathrm{N}(r, 0) - \mathrm{N}(r, \infty) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi - \log\left|c_q\right| . \qquad (1)$$

Dans l'intégrale, on peut séparer les parties où $\log\left|f(re^{i\varphi})\right|$ est positif de celles où cette quantité est négative. Si l'on désigne par u^+ le nombre égal à u si u est réel positif et 0 si $u \leqslant 0$, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|\frac{1}{f(re^{i\varphi})}\right| d\varphi .$$

Si l'on désigne d'une façon générale par $m(r, a)$ l'intégrale

$$m(r, a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|\frac{1}{f(re^{i\varphi}) - a}\right| d\varphi , \quad \left(m(r, \infty) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi\right)$$

la formule (1) s'écrit

$$\mathrm{N}(r, 0) - \mathrm{N}(r, \infty) = m(r, \infty) - m(r, 0) - \log\left|c_q\right|$$

ou

$$N(r, \infty) + m(r, \infty) = N(r, 0) + m(r, 0) + \log |c_q| .$$

Le premier membre est la caractéristique $T(r)$ ou $T(r, f)$ de Nevanlinna.

41. *Théorèmes de H. Cartan. Propriété de* T (r).

θ étant réel, appliquons la formule de Jensen (1) à $f(z) - e^{i\theta}$. Nous aurons

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\varphi}) - e^{i\theta}| \, d\varphi - \log |f(0) - e^{i\theta}| = N(r, e^{i\theta}) - N(r, 0) . \tag{2}$$

Multiplions les deux membres par $\frac{d\theta}{2\pi}$ et intégrons de 0 à 2π. Nous aurons, d'après la formule de Jensen appliquée à la fonction $u - f(0)$, $|u| = 1$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |f(0) - e^{i\theta}| \, d\theta = \log^+ |f(0)|$$

car, si $|f(0)| > 1$, $u - f(0)$ ne s'annule pas dans le cercle $|u| < 1$, et si $|f(0)| < 1$, il y a un zéro, qui est $f(0)$, le second membre est alors $\log |f(0)| + \log \frac{1}{|f(0)|} = 0$.

D'autre part,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\varphi}) - e^{i\theta}| \, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\varphi}) - e^{i\theta}| \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi})| \, d\varphi = m(r, \infty) .$$

On déduit donc de (2)

$$T(r, f) = m(r, \infty) + N(r, \infty) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r, e^{i\theta}) \, d\theta + \log^+ |f(0)| . \tag{3}$$

Ceci suppose $|f(0)| \neq \infty$. Si l'origine est pôle, on aura à mettre $\log^+ |c_q|$ au lieu de $\log^+ |f(0)|$.

Comme $N(r, e^{i\theta})$ est une fonction convexe non décroissante de $\log r$, la formule (3) de Cartan montre qu'il en est de même de $T(r, f)$. Mais on peut aussi écrire, en remplaçant $N(r, e^{i\theta})$ par sa valeur, $n(0, e^{i\theta})$ n'étant différent de 0 que pour une valeur au plus de θ,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r, e^{i\theta})\, d\theta = \int_0^r \frac{dx}{x}\int_0^{2\pi} n(x, e^{i\theta})\, d\theta$$

ce qui donne le théorème de Cartan [36].

La fonction T (r, f) *a une dérivée, on a*

$$\frac{dT(r, f)}{d\log r} = t(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n(r, e^{i\theta})\, d\theta\,.$$

La formule (3) définit $T(r, f)$ comme étant, à une constante additive près, la moyenne de $N(r, Z)$ pour les Z de module 1. Elle se généralise en considérant la moyenne pour les Z de module ρ [37]. On a à la place de la formule (2)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\theta}) - \rho e^{i\theta}\right| d\varphi - \log\left|f(0) - \rho e^{i\theta}\right| = N(r, \rho e^{i\theta}) - N(r, \infty)\,.$$

En intégrant les deux membres multipliés par $\frac{1}{2\pi}\, d\theta$ et procédant comme ci-dessus, on obtient la formule de H. Cartan qui généralise (3)

$$T\left(r, \frac{f}{\rho}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r, \rho e^{i\theta})\, d\theta + \log^+ \frac{|f(0)|}{\rho}\,. \qquad (4)$$

Or, si u et v sont positifs, on a, on le voit de suite

$$\log^+(uv) \leqslant \log^+ u + \log^+ v\,,$$

donc aussi

$$\log^+ u \leqslant \log^+ uv + \log^+ \frac{1}{v}\,.$$

Il s'ensuit que

$$-\log^+ \rho < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|\frac{f(re^{i\varphi})}{\rho}\right| d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|f(re^{i\varphi})\right| d\rho \leqslant \log^+ \frac{1}{\rho}$$

donc

$$-\log^+ \rho \leqslant T\left(r, \frac{f}{\rho}\right) - T(r, f) \leqslant \log^+ \frac{1}{\rho}$$

$$-\log^+ \rho \leqslant \log^+ \left|\frac{f(0)}{\rho}\right| - \log^+ |f(0)| \leqslant \log^+ \frac{1}{\rho}$$

et, par suite, d'après (4)

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(r, \rho e^{i\theta})\, d\theta + \log^+ |f(0)| + \theta\left(\log^+ \rho + \log^+ \frac{1}{\rho}\right), \quad -1 < \theta < 1 . \tag{5}$$

42. *Représentation sphérique. Formules de Cartan et Shimizu.*

On sait qu'on peut représenter les nombres complexes $z = x + iy$, sur une sphère de diamètre 1 tangente au plan Oxy à l'origine. Si P est le point de la sphère diamétralement opposé à O, on fait correspondre au point M (x, y) du plan Oxy le point m de la sphère situé sur PM. Le point m sera l'image sphérique du nombre z. Si le point M décrit un arc de courbe dont l'élément d'arc est $ds = |dz|$, le point m décrit un arc $d\sigma$ et les formules de l'inversion montrent que

$$d\sigma = \frac{ds}{1 + |z|^2} .$$

La longueur de l'image de la circonférence $|z| = \rho$ est donc $\frac{2\pi\rho}{1 + \rho^2}$. L'aire de la calotte sphérique image du cercle $|z| < \rho$ est

$$A(\rho) = \int_0^{\rho} \int_0^{2\pi} \frac{t\, dt\, d\theta}{(1 + t^2)^2} = \pi\left(1 - \frac{1}{1 + \rho^2}\right) = \pi \frac{\rho^2}{1 + \rho^2} .$$

La moyenne de $N(r, te^{i\theta})$ pour $t < \rho$, prise sur la sphère est

$$\frac{1 + \rho^2}{\pi\rho^2} \int_0^{\rho} \int_0^{2\pi} \frac{t\, N(r, te^{i\theta})\, dt\, d\theta}{(1 + t^2)^2}$$

et, en remplaçant $\int_0^{2\pi} N(r, te^{i\theta})\, d\theta$ par sa valeur tirée de (5), on obtient

$$T(r, f) - \log |f(0)| + \theta \frac{1 + \rho^2}{\rho^2} \int_0^{\rho} \frac{2t}{(1 + t^2)^2} \left(\log^+ t + \log^+ \frac{1}{t}\right) dt, \quad -1 < \theta < 1 .$$

Le coefficient de θ est borné pour $\rho > \rho_0 > 0$. On a donc cette conséquence:

Pour $\rho > \rho_0 > 0$, *la valeur absolue de la différence entre* T (r, f) *et la moyenne sphérique de* N (r, Z) *pour les* Z *de module moindre que* ρ *est bornée par un nombre fixe, ne dépendant que de* | f (0) |:

$$\left| T(r, f) - \frac{1}{A(\rho)} \int\int_{A(\rho)} N(r, Z)\, d\omega \right| < K . \tag{6}$$

En prenant ρ infini, on obtient un résultat de Shimizu [38]:

La différence entre T (r, f) *et la moyenne de* N (*r*, Z) *sur la sphère est bornée par un nombre indépendant de* r.

Ces propositions montrent que la fonction T (*r*, *f*), ou toute fonction qui n'en diffère que par une constante, ou une quantité bornée, est celle qui s'impose dans l'étude des propriétés moyennes de N (*r*, Z), tandis que sa dérivée peut caractériser les propriétés moyennes de *n* (*r*, Z).

43. *Limitation de* N(r, a). *Valeurs déficientes* V.

Si a est fini, on a

$$T(r, f - a) = N(r, \infty) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi}) - a|\, d\varphi .$$

On vérifie aisément que

$$\log^+ (u + v) \leqslant \log^+ u + \log^+ v + \log 2 ,$$

donc

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi}) - a|\, d\varphi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi \right| \leqslant \log^+ |a| + \log 2$$

et en conséquence

$$|T(r, f - a) - T(r, f)| \leqslant \log^+ |a| + \log 2 .$$

Comme, dans le cas général où $f(0) - a \neq 0$,

$$T(r, f - a) = N(r, a) + m(r, a) + \log |f(0) - a|$$

on obtient pour $N(r, a)$ une borne

$$N(r, a) < T(r, f) + \log^+ |a| - \log |f(0) - a| + \log 2 . \qquad (7)$$

dans laquelle, en dehors de $T(r, f)$ figure une expression qui est bornée si a s'écarte suffisamment de $f(0)$. Donc, si $|f(0) - a| > \alpha > 0$, on a

$$N(r, a) < T(r, f) + K' . \qquad (8)$$

Le rapprochement des inégalités (6) et (8), ou plus précisément de (8) et du théorème de Shimizu suggère évidemment que la différence entre $T(r, f)$ et $N(r, a)$ doit être en général relativement petite si $T(r, f)$ tend vers l'infini.

Supposons que f (z) *soit méromorphe dans tout le plan sauf à l'infini.* Si l'on admet le théorème de Picard, on sait que $f(z)$ prend une infinité de fois toute valeur sauf au plus deux valeurs exceptionnelles, donc si a n'est pas valeur exceptionnelle, $N(r, a)$ croît indéfiniment et le rapport de $N(r, a)$ à $\log r$ tend vers l'infini, donc, d'après (7)

$$\lim_{r=\infty} \frac{T(r, f)}{\log r} = \infty$$

D'une façon plus générale, si $T(r, f)$ était borné lorsque $r \to \infty$, $N(r, a)$ serait borné, donc $n(r, a) = 0$, $f(z) - a$ ne s'annulerait pour aucun a tel que $f(0) - a \neq 0$, $f(z)$ serait constant; les cas où

$$T(r, f) = 0 (\log r)$$

correspondent aux fractions rationnelles.

Si $T(r)$ tend vers l'infini avec r, comme la moyenne superficielle de $N(r, Z)$ sur la sphère diffère de $T(r)$ de moins de K, si l'on avait

$$N(r, Z) \leqslant T(r) - T(r)^{\frac{1}{2} + \varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0$$

dans des aires sphériques dont la somme serait $\dfrac{K''}{T(r)^{\frac{1}{2} + \varepsilon}}$, ces aires ne fourniraient qu'une contribution au plus égale à

$$\frac{K''}{T(r)^{\frac{1}{2} + \varepsilon}} T(r) - K''$$

et ailleurs, d'après (7) et (8), on aurait au plus

$$\left(\pi - \frac{K''}{T(r)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}\right) T(r) + K_2 \pi$$

ce qui donnerait une contradiction si K'' est assez grand. On a donc

$$N(r, Z) > T(r) - T(r)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \tag{9}$$

sauf au plus dans des aires de somme

$$\frac{K''}{T(r)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}.$$

Si nous remplaçons (9) par

$$N(r', Z) > T(r') - 2\,T(r')^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, \tag{10}$$

on voit que si (9) a lieu pour r, (10) a lieu pour

$$r \leqslant r' \leqslant r_1, \qquad T(r_1) = T(r) + T(r)^{\frac{1}{2}+\varepsilon};$$

et (10) aura encore lieu entre r_1 et r_2 défini par

$$T(r_2) = T(r_1) + T(r)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

à condition d'exclure de nouvelles aires. Au bout de $T(r)^{\frac{1}{2}}$ opérations on arrivera à atteindre un r_p pour lequel $T(r_p) \geqslant 2T(r)$; la somme des aires exclues sera moindre que

$$\frac{2\,K''}{T(r)^{2\varepsilon}}.$$

et (10) aura lieu dans un intervalle r, r'' avec $T(r'') = 2T(r)$. En itérant ce procédé, on voit que (10) aura lieu pour tous les r' pour les Z représentés à l'extérieur d'aires formant une série convergente. L'inégalité (10) aura lieu à partir d'une valeur r' pour tous les Z extérieurs à des aires dont la somme est aussi petite que l'on veut. Pour tous les Z représentés sur la sphère

à l'extérieur d'un ensemble de mesure superficielle nulle on a, pour $r > r(Z)$

$$N(r, Z) > T(r) - 2\,T(r)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0 .$$

En rapprochant cette inégalité de (7), on a ce résultat:

Le rapport de N (r, z) *à* T (r, f) *tend vers* 1 *lorsque* r *tend vers l'infini sauf pour un ensemble exceptionnel de valeurs de* Z. *Ces valeurs de* Z *sont appelées valeurs déficientes* V [39].

D'après la démonstration élémentaire qui vient d'être donnée, l'ensemble exceptionnel est au plus de mesure superficielle nulle. En réalité sa mesure linéaire est nulle et même davantage et la propriété est vraie pour les fonctions méromorphes dans un cercle lorsque $T(r, f)$ n'est pas borné [40]. Mais cet ensemble peut exister et avoir la puissance du continu (voir Valiron, premier mémoire cité ci-dessous). La propriété d'homogénéité de la distribution des valeurs Z ainsi mise en évidence subsiste aussi pour les fonctions algébroïdes méromorphes $u(z)$ définies par une équation

$$u^{\nu} A_{\nu}(z) + u^{\nu-1} A_{\nu-1}(z) + \ldots + A_0(z) = 0 ,$$

où les $A_j(z)$ sont des fonctions entières, la définition de $N(r, a)$ étant la même pour $u - a$ que pour $f - a$.

On remarquera que la propriété de $N(r, Z)$ montre que, pour les fonctions d'ordre nul de la classe normale,

$$T(r, f) \sim \log M(r, f).$$

44. *Formule de Nevanlinna.*

La formule de Jensen, dans le cas $f(0)$ fini non nul donne la valeur de $|f(0)|$ au moyen des modules des zéros, des pôles et de la moyenne de $|f(z)|$ pour $|z| = r$; elle a été généralisée par R. Nevanlinna. On peut obtenir sa formule en faisant une transformation homographique du cercle de rayon r sur lui-même. On a

$$\log |f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi + \sum_1^p \log \frac{r}{|b_j|} - \sum_1^n \log \frac{r}{|a_k|} \qquad (11)$$

les b_j étant les pôles et les a_k les zéros de $f(z)$ intérieurs au cercle $|z| < r$. On obtiendra une formule donnant $|f(z_0)|$, $|z_0| < r$ en faisant la transformation

$$\zeta = r^2 \frac{z - z_0}{r^2 - \bar{z}_0 z} \qquad F(\zeta) = f(z) \tag{12}$$

et en appliquant la formule (11) à $F(\zeta)$. La transformation de l'intégrale s'effectue en posant pour $z = re^{i\varphi}$, $\zeta = re^{i\psi}$, ce qui montre, en prenant les dérivées logarithmiques dans (12), que

$$d\varphi = \frac{r^2 - |z_0|^2}{r^2 + |z_0|^2 - 2r|z_0| \cos(\psi - \psi_0)} d\psi , \qquad z_0 = |z_0| e^{i\psi_0} .$$

On obtient ainsi la première formule de Nevanlinna

$$\log |f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\psi})| \frac{r^2 - |z_0|^2}{r^2 + |z_0|^2 - 2r|z_0| \cos(\psi - \psi_0)} d\psi +$$

$$+ \sum_1^p \log |\Phi(z_0, b_j| - \sum_1^n \log |\Phi(z_0, a_k| , \tag{13}$$

avec

$$\Phi(z, c) = \frac{r^2 - \bar{z}c}{r(c - z)} . \tag{14}$$

De cette formule, R. Nevanlinna en déduit une autre donnant la dérivée logarithmique [41].

45. *Comparaison de* T (r, f) *et log* M (r, f) *lorsque* f (z) *est une fonction entière.*

Si $f(z)$ est une fonction entière, on a

$$T(r, f) = m(r, \infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi < \log M(r, f) .$$

D'autre part, la formule (13) dans laquelle les termes relatifs aux pôles disparaissent et où, d'après (14) et (12), $|\Phi(z_0, a_k)| \geqslant 1$, donne

$$\log |f(z_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\psi})| \frac{r^2 - |z_0|^2}{(r - |z_0|)^2} d\psi$$

puisque

$$r^2 + |z_0|^2 - 2r|z_0|\cos(\psi - \psi_0) \geqslant (r - |z_0|)^2 .$$

Il s'ensuit que, en appliquant cette inégalité au point z_0 de module kr, $k < 1$, en lequel $|f(z_0)| = M(kr, f)$, on a

$$\log M(kr, f) \leqslant \frac{1+k}{1-k} T(r, f) .$$

De ces deux inégalités, on déduit (Nevanlinna)

$$\frac{1-k}{1+k} \log M(kr, f) < T(r, f) < \log M(r, f) , \qquad 0 < k < 1 . \qquad (15)$$

Il en résulte que

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log T(r, f)}{\log r} = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log_2 M(r, f)}{\log r}$$

l'ordre de T (r, f) *est égal à l'ordre de* f (z) *défini à l'aide de log* M (r, f).

On pourra définir la classe convergente ou divergente de l'ordre fini positif ρ au moyen de $T(r, f)$ au lieu de $\log M(r, f)$. On pourra définir un ordre précisé de $T(r, f)$ comme on l'a défini à partir de $\log M(r, f)$. Toutes ces définitions s'étendront d'elles-mêmes au cas où $f(z)$ est méromorphe.

La relation (15) reste évidemment imprécise dans les cas généraux, ou si l'on préfère, lorsque $f(z)$ est une fonction entière, la connaissance même très précise de $\log M(r, f)$ fournie par les coefficients du développement taylorien ne donne pas une connaissance précise de $T(r, f)$. Par exemple, si $f(z)$ est parfaitement régulière par rapport à un ordre précisé $\rho(r)$, (15) montre seulement que

$$H_\rho (1 - 0(1)) r^{\rho(r)} < T(r, f) < (1 + 0(1)) r^{\rho(r)} ,$$

où

$$H_\rho = \frac{1-k}{1+k} k^\rho , \qquad k < 1 .$$

On pourra choisir k pour obtenir le maximum de H_ρ.

L'emploi de la relation (15) et des inégalités entre $\log M(r, f)$ et $\log M(r, f')$ obtenues au n° 4 fournira des relations entre $T(r, f)$

et $T(r, f')$ [1]. Dans le cas général des fonctions méromorphes l'étude de ces relations utilise la considération des propriétés de la dérivée logarithmique [42].

46. *Remarques.*

I. Dans quelques cas simples, le calcul approché de $T(r, f)$ pour une fonction entière est aussi facile que celui de $\log M(r, f)$. C'est le cas pour les fonctions élémentaires, pour les fonctions de Mittag-Leffer, pour les fonctions d'ordre non entier dont les zéros ont tous le même argument et $n(r) \sim r^{\rho(r)}$. C'est aussi le cas pour les fonctions vérifiant certaines équations fonctionnelles simples. Ainsi, pour les solutions des équations de Poincaré

$$f(zs) = P(z, f(z)) , \qquad |s| > 1 ,$$

où $P(x, y)$ est un polynôme dont le degré q en y est supérieur à 1. On obtient

$$T(r|s|, f) = q\,T(r, f) + 0(\log r)$$

et, en itérant,

$$T(r_0|s|^n, f) \sim B(r_0)\,q^n ,$$

ce qui donne en posant $r = r_0|s|^n$,

$$T(r, f) \sim A(\log r)\,r^{\rho} , \qquad \rho = \frac{\log q}{\log|s|} ,$$

$A(x)$ étant une fonction périodique de période $\log|s|$. $A(x)$ est effectivement non constante dans certains cas, par exemple lorsque

$$f(z) = \prod_1^{\infty}\left(1 - \frac{z}{s^n}\right)^{2^{n-1}} , \qquad |s| = 16 ,$$

qui est solution de

$$f(zs) = (1 - z)\,[f(z)]^2 .$$

II. Soit une fonction méromorphe pour laquelle, pour $r > r_0$,

$$T(r, f) < A(\log r)^2 , \qquad A \text{ fini.} \tag{16}$$

On aura une inégalité analogue pour $N(r, \infty)$ et $N(r, s)$. On pourra donc former des produits infinis $g(z)$ et $h(z)$ admettant respectivement pour zéros les pôles et les zéros de $f(z)$ et l'on aura pour ces fonctions

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r, \varphi)}{(\log r)^2} < \infty , \qquad \varphi = g \quad \text{et} \quad \varphi = h . \tag{17}$$

Le quotient

$$K(z) = \frac{f(z)\, g(z)}{h(z)}$$

n'aura plus ni pôles ni zéros et l'on aura, d'après l'inégalité

$$\log^+ (uv) \leqslant \log^+ u + \log^+ v ,$$

$$T(r, K) \leqslant T(r, f) + T(r, g) + T\left(r, \frac{1}{h}\right)$$

$$T\left(r, \frac{1}{h}\right) = T(r, h) + h$$

donc

$$T(r, K) < B(\log r)^2 , \qquad r > r_0 .$$

Or $K(z)$ est une fonction entière sans zéros, donc de la forme $e^{l(z)}$; d'après la formule (15), sa partie réelle pour $|z| < r$ sera bornée par $B_1 (\log r)^2$, ce sera une constante d'après le théorème sur la partie réelle (n° 18). Toute fonction méromorphe vérifiant (16) est le quotient de deux fonctions entières vérifiant (17).

III. D'une façon générale, une fonction méromorphe $f(z)$ peut se mettre sous la forme du quotient de deux fonctions entières $g(z)$ et $h(z)$ sans zéros communs. On a

$$f = \frac{h}{g} , \qquad T(r, f) = N(r, \infty) + m(r, \infty) ,$$

$$m(r, \infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \frac{h(re^{i\varphi})}{g(re^{i\varphi})} \right| d\varphi$$

et, d'après le théorème de Jensen

$$N(r, \infty) + \log |c_q| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(re^{i\varphi})|\, d\varphi .$$

Si $|h| < |g|$ le $\log^+$ dans $m(r, \infty)$ est nul; si $|h| > |g|$ le $\log^+$ est égal à $\log\left|\frac{h}{g}\right| = \log|h| - \log|g|$. Par suite, on a

$$T(r, f) = \log|c_q| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \lambda(re^{i\varphi})\, d\varphi ,$$

$\lambda(z)$ étant le plus grand des deux nombres $|h(z)|$ et $|g(z)|$.

IV. Caractéristique de Shimizu-Ahlfors. Fonction L (r).

47. *Aire couverte par les valeurs de* f (z).

Considérons la fonction $Z = f(z)$ méromorphe pour $|z| \leqslant r$ et représentons les points Z sur la sphère de diamètre 1 déjà envisagée au n° 42. Lorsque z parcourt le cercle $|z| \leqslant r$, le point Z décrit une surface de Riemann transposée sur la sphère, c'est en général une surface à plusieurs feuillets. Nous appellerons $\pi S(r)$ l'aire totale de ces feuillets. On a vu que, à l'élément d'aire $dX\, dY$ du plan des X, Y ($Z = X + iY$) correspond sur la sphère un élément d'aire

$$d\omega = \frac{dX\, dY}{(1 + |Z|^2)^2} .$$

D'autre part, à l'élément d'aire $tdtd\varphi$ du point $te^{i\varphi}$ du plan z, la fonction $Z = f(z)$ fait correspondre l'élément d'aire

$$dX\, dY = |f'(z)|^2\, t\, dt\, d\varphi .$$

On a donc, sur la sphère,

$$d\omega = \frac{|f'(z)|^2}{(1 + |f(z)|^2)^2}\, td\, td\varphi$$

et

$$\pi S(r) = \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{|f'(te^{i\varphi})|^2}{(1 + |f(te^{i\varphi})|^2)^2}\, t\, dt\, d\varphi . \qquad (1)$$

Le second membre peut s'écrire autrement; $n(r, Z)$ est le nombre des feuillets de la surface de Riemann sphérique qui recouvrent