Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 4 (1958)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE FINI ET FONCTIONS MÉROMORPHES

Autor: Valiron, Georges

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-34637

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE FINI ET FONCTIONS MÉROMORPHES *

par Georges VALIRON †

(suite)

DEUXIÈME PARTIE

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS MÉROMORPHES

I. FONCTIONS DE LA CLASSE W ET LEURS INVERSES.

29. *Fonctions entières de la classe* W *et leurs fonctions inverses.*

Une fonction entière de la classe W est une fonction $f(z)$ pour laquelle existe une suite de courbes simples fermées Γ_n entourant l'origine, Γ_{n+1} contenant Γ_n à son intérieur et telles que le minimum de $|f(z)|$ sur Γ_n tende vers l'infini lorsque n tend vers l'infini (ce qui exige évidemment que Γ_n s'éloigne indéfiniment lorsque $n \to \infty$). On peut supprimer une suite infinie de courbes Γ_n sans changer ces propriétés; il est donc permis de supposer que le minimum m_{n+1} de $|f(z)|$ sur Γ_{n+1} est supérieur au maximum M_n de $|f(z)|$ sur Γ_n, maximum qui est atteint en un point P_n au moins de Γ_n. Considérons les domaines dans lesquels $|f(z)| < M_n$, n étant donné; l'un d'eux, soit D_n, contient l'intérieur de Γ_n puisque, dans l'intérieur de Γ_n, $|f(z)| < M_n$; le point P_n appartient à la frontière C_n de D_n qui est une courbe analytique intérieure à Γ_{n+1} puisque $m_{n+1} > M_n$. Nous obtenons ainsi une suite de courbes de module constant C_n; sur chaque C_n, $|f(z)| = M_n$ et à l'intérieur de D_n, $|f(z)| < M_n$. Pour tous les Z de module inférieur à M_n, l'équa-

*) Série de cours et de conférences sur la théorie des fonctions entières, faits en 1948 au Caire et à Alexandrie, d'après le manuscrit revu et mis au point par le professeur Henri MILLOUX.

tion $f(z) = Z$ a le même nombre p_n de racines intérieures à D_n, la dérivée $f'(z)$ a exactement $p_n - 1$ racines dans D_n si l'on suppose, ce qui est possible en diminuant infiniment peu s'il y a lieu la valeur de M_n, que $f'(z)$ ne s'annule pas sur C_n. La fonction inverse $z = f_{-1}(Z)$ de $Z = f(z)$ correspondant à z intérieur à D_n est une fonction à p_n branches définie dans le cercle $|Z| < M_n$. On peut rendre ses branches uniformes en joignant les points $Z^j = f(z^j)$ correspondant à $f'(z^j) = 0$ à la circonférence $|Z| = M_n$ par des rayons (si $Z^j = 0$) ou des segments de rayon. Et on peut considérer la surface de Riemann à p_n feuillets circulaires réunis les uns aux autres le long de certains de ces rayons ou segments de rayon de façon à former une surface connexe sur laquelle $z = f_{-1}(Z)$ est uniforme [22]. Lorsque n croît le rayon du cercle $|Z| = M_n$ croît, les feuillets voient augmenter leur rayon, les lignes de passage doivent être prolongées et de nouvelles lignes s'introduisent permettant le passage dans de nouveaux feuillets. Si l'on fait croître n indéfiniment, on obtient à la limite la surface de Riemann à une infinité de feuillets sur laquelle la fonction inverse $z = f_{-1}(Z)$ est définie et uniforme quel que soit Z fini. On peut préciser ce qui vient d'être dit: si dans le domaine limité par C_n et C_{n+1}, $f(z)$ ne s'annule pas, aucun feuillet nouveau ne s'introduit lorsqu'on passe de C_n à C_{n+1}; si au contraire $p_{n+1} - p_n$ n'est pas nul, $p_{n+1} - p_n$ nouveaux feuillets s'introduisent et $f'(z)$ a aussi $p_{n+1} - p_n$ zéros dans le domaine compris entre C_n et C_{n+1}. Comme la portion de surface de Riemann correspondant à D_{n+1} est formée de p_{n+1} feuillets circulaires formant une surface connexe, l'un au moins des points Z^j correspondant à un z^j compris entre C_n et C_{n+1} est extérieur à la circonférence $|Z| < M_n$ et se trouve sur l'un des feuillets correspondant à D_n prolongés dans $|Z| < M_{n+1}$.

Les points singuliers de la surface Σ de Riemann sont les points critiques algébriques Z^j et le point à l'infini. D'après ce qui vient d'être dit, le point à l'infini est point limite de points critiques algébriques. Ce point à l'infini doit être considéré comme un *seul point* sur la surface Σ, car lorsqu'on tourne et décrit une courbe C_n, le point Z tourne p_n fois sur le cercle $|Z| = M_n$ et parcourt les p_n feuillets; il s'ensuit qu'on peut

aller sur Σ d'un point Z de grand module à un autre point Z′ de grand module sans cesser de rester dans le voisinage du point à l'infini. Ce même fait est visible dans le plan des z. Si Z et Z′ sont de grands modules, les valeurs z et z' le sont aussi, z et z' sont par exemple extérieurs à C_n et intérieurs à C_m, $m > n$, et en outre extérieurs aux domaines $| f(z) | < A$ contenus dans la « couronne » comprise entre C_n et C_m, on peut joindre ces points par une courbe le long de laquelle $| f(z) | > A$.

Ainsi, il y a un seul point singulier à l'infini sur Σ. Quelle que soit la façon dont Z s'éloigne indéfiniment sur Σ, z tend vers l'infini. On dit que Z infini est un point *directement critique* et comme il est point limite de points critiques algébriques on dit qu'il est de *seconde espèce.*

Si l'on considère l'un des feuillets de la surface Σ telle qu'elle a été construite et si on prend sur ce feuillet l'intérieur d'un cercle $| Z | < R$, il n'existe dans ce cercle qu'un nombre fini de points Z^j situés sur ce feuillet et par suite un nombre fini de lignes de passage issues de ces points. Au feuillet complet correspond dans le plan des z un domaine Δ nécessairement non borné qui est un domaine complet d'univalence de la fonction $f(z)$; dans Δ augmenté de sa frontière $f(z)$ prend toute valeur finie. La frontière de Δ correspond aux lignes de passage situées sur le feuillet considéré, elle est formée de lignes sur lesquelles l'argument de $f(z)$ est constant. A la surface Σ et à ses lignes de passage correspond ainsi une division du plan des z en domaines complets d'univalence.

Bien que les surfaces de Riemann ainsi obtenues soient les plus simples parmi les surfaces simplement connexes (elles sont simplement connexes puisqu'elles correspondent biunivoquement au plan des z privé du point à l'infini), elles peuvent présenter quelques anomalies. Dans les cas simples, chaque feuillet ne contiendra qu'un nombre fini de points critiques, mais dans certains cas un feuillet, ou un nombre fini de feuillets, ou même tous les feuillets pourront renfermer une infinité de lignes de passage. Les fonctions d'ordre nul permettent de construire des exemples de cette espèce, en partant évidemment de la dérivée de la fonction. On obtient ainsi des fonctions pour lesquelles, soit sur un feuillet, soit sur un nombre fini de feuillets, soit sur tous

les feuillets, les arguments des lignes de passage sont denses sur le segment $(0, 2\pi)$. Dans le plan des z, les lignes $\arg Z = \text{const.}$ qui coupent un arc de courbe $|Z| = \text{const.}$ et qui sont menées dans le sens des $|Z|$ croissants, coupent cet arc en des points denses sur cet arc [23].

30. *Fonctions de la classe* W *holomorphes pour* $|z| < 1$.

Les fonctions de Kœnigs étudiées par Fatou dans ses mémoires sur l'itération (*Bull. Soc. math.*, 1920), les fonctions construites par Lusin et Priwalof (*Annales Ecole norm.*, 1925) jouissent de la propriété suivante: Ces fonctions sont holomorphes pour $|z| < 1$. $F(z)$ étant une de ces fonctions, il existe une suite de courbes Γ_n simples fermées, Γ_n étant contenue dans une couronne $1 - \varepsilon_n < |z| < 1$ (ε_n tendant vers zéro lorsque n croît indéfiniment) telles que le minimum de $|F(z)|$ sur F_n tende vers l'infini avec n. On peut répéter pour une telle fonction ce qui a été dit au n° 29 pour les fonctions entières: il existe une suite de courbes C_n de module constant $|F(z)| = M_n$ telles que C_{n+1} contienne C_n à son intérieur, enveloppant l'origine, et telles que M_n croisse indéfiniment avec n. Si grand que soit A, il existe une suite de domaines Δ_n ayant pour frontières deux courbes consécutives C_n, C_{n+1} contenant des domaines $\delta_n(A)$ dans lesquels $|F(z)| < A$, ces domaines δ_n ne tournant pas autour de l'origine. Tout point de la circonférence $|z| = 1$ est point limite de points $\delta_n(A_n)$ si $A_n \to \infty$ (sinon $|F(z)|$ tendrait vers l'infini lorsque z tendrait vers les points d'un arc α de $|z| = 1$, donc $\frac{1}{F(z)}$ tendrait vers zéro, $\frac{1}{F(z)}$ serait identiquement nul d'après le principe de la symétrie de Schwarz). En est-il de même si on laisse A_n fixe ?

On peut construire la surface de Riemann Σ décrite par $Z = F(z)$ comme dans le cas des fonctions entières du n° 29. Pour les mêmes raisons qu'au n° 29, le point à l'infini, $Z = \infty$, doit être considéré comme un seul point sur cette surface, c'est le seul point critique non algébrique de cette surface Σ et ce point critique est limite de points critiques algébriques. Σ est une surface simplement connexe qui est représentée par la fonction inverse $z = F_{-1}(Z)$ de $F(z)$ sur le cercle $|z| < 1$. C'est une

surface du *type hyperbolique*, les surfaces simplement connexes représentables conformément (sauf aux points de ramification) sur le plan privé du point à l'infini étant dites du *type parabolique* et les surfaces représentables sur le plan complet étant les surfaces du *type elliptique*. Les surfaces du type elliptique sont les surfaces décrites par les valeurs des fractions rationnelles, les surfaces du type parabolique sont les surfaces décrites par les valeurs des fonctions méromorphes sauf à l'infini qui est point essentiel, les surfaces du type hyperbolique sont les surfaces décrites par les valeurs des fonctions méromorphes dans un cercle et admettant la circonférence comme coupure.

Dans le cas actuel, la surface Σ est du type hyperbolique et est illimitée. A la surface telle qu'elle a été obtenue correspond dans le plan des z une division de l'intérieur du cercle $|z| < 1$ en domaines complets d'univalence pour $F(z)$. Ces domaines ne sont pas complètement intérieurs au cercle $|z| < 1$ mais la façon dont ils approchent de la circonférence $|z| = 1$ reste inconnue.

Dans les cas particuliers des fonctions de Kœnigs, par exemple, la fonction $F(z)$ tend vers l'infini lorsque $|z|$ tend vers un sur un rayon, arg. z = const., presque pour tous les rayons, dans les exemples de Lusin et Priwalof; parmi les courbes Γ_n figurent des cercles de centre à l'origine. A-t-on toujours des propriétés de ce genre ?

Quoi qu'il en soit, le fait important est l'existence d'un seul point critique non algébrique pour la fonction inverse, point qui est point limite de points critiques algébriques.

31. *Sur une classe de surfaces du type hyperbolique.*

Dans les exemples de Fatou, Lusin et Priwalof signalés ci-dessus, il existe des rayons arg. z = const. sur lesquels $|F(z)| \to \infty$ lorsque $|z| \to 1$. Pour la fonction inverse $z = F_{-1}(Z)$, il existe donc des chemins tendant vers l'infini sur lesquels z a une limite. Il y a naturellement d'autres chemins sur lesquels $Z \to \infty$ tandis que z n'a pas de limite, $|z| \to 1$ et, par exemple, arg. z tend vers l'infini. Nous allons voir qu'il existe des fonctions pour lesquelles la fonction inverse n'a qu'une seule singularité à l'infini, isolée des singularités algébriques et pour lesquelles, quelle que soit

la façon dont Z tend vers l'infini, z n'a jamais de limite. Nous nous bornerons à un exemple particulier [24].

Prenons la fonction

$$z = e^{\zeta - \frac{1}{\sqrt{\zeta}}}, \qquad \zeta = \xi + i\eta, \tag{1}$$

où l'on suppose $\eta > \eta_0 > 0$ et où l'on prend

$$\sqrt{\zeta} = (1 + i)\sqrt{\frac{\eta}{2}} \qquad \text{pour} \qquad \xi = 0,$$

et $|\xi|\,\eta^2 < 1$. Cette fonction représente conformément et biunivoquement le domaine Δ défini par $\eta > \eta_0$, $|\xi|\,\eta^2 < 1$ sur un domaine D en forme de spirale, intérieur au cercle $|z| < 1$ et qui s'enroule autour de ce cercle. En deux points homologues de D et Δ, le rapport de similitude tend vers un lorsqu'on s'éloigne indéfiniment dans Δ.

Considérons, d'autre part, la fonction

$$g(\zeta) = e^{e^{e^{-i\zeta}}}$$

qui tend rapidement vers zéro lorsqu'on s'éloigne indéfiniment dans Δ dans certains domaines et qui croît indéfiniment dans d'autres puisque

$$e^{-i\xi} = e^{\eta - i\xi},$$

$$e^{e^{-i\zeta}} = e^{e^{\eta}(\cos\xi + i\sin\xi)} = e^{e^{\eta}\cos\xi}\left[\cos(e^{\eta}\sin\xi) + i\sin(e^{\eta}\sin\xi)\right]$$

de sorte que, si

$$e^{\eta}\sin\xi = \pm\pi + a, \qquad |a| < \frac{\pi}{2},$$

$|g(\zeta)|$ tend vers zéro comme

$$e^{-\cos a\, e^{e^{\eta}(1 - 0(1))}}, \tag{2}$$

tandis que, si

$$e^{\eta}\sin\xi = \alpha, \qquad |\alpha| < \frac{\pi}{2},$$

$|g(\zeta)|$ tend vers l'infini comme

$$e^{\cos\alpha\, e^{e^{\eta}(1 - 0(1))}}.$$

Désignons par $\zeta = h(z)$ la fonction inverse de (1) lorsque ξ est dans Δ; c'est une fonction holomorphe dans le domaine spiralique D; la fonction

$$F(z) = g(h(z))$$

se comporte comme $g(\zeta)$. Appelons $\Gamma(a, b)$ la courbe de D correspondant à la frontière de la portion $\delta(a, b)$ de Δ définie par

$$|e^{\eta} \sin \xi| < \pi + a, \qquad 0 < a < \frac{\pi}{2}; \qquad \eta > b > \eta_0 .$$

La courbe $\Gamma(a, b)$ décompose le cercle $|z| < 1$ en deux domaines: un domaine en spirale intérieur à D, soit $I(a, b)$, et un domaine complémentaire $E(a, b)$.

La rapidité de la décroissance de (2) montre que l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma(a,b)} \frac{F(u)}{u - z} du \tag{3}$$

où u décrit $\Gamma(a, b)$ dans le sens direct, définit une fonction $f(z)$ holomorphe dans $E(a, b)$ et une fonction $f_1(z)$ holomorphe dans $I(a, b)$. Lorsque $|z|$ tend vers 1, $|f(z)|$ et $|f_1(z)|$ restent uniformément bornés si z ne se rapproche pas trop de $\Gamma(a, b)$; on vérifie qu'il suffit que

$$|e^{\eta} \sin \xi \pm (\pi + a)| > \varepsilon > 0$$

pour qu'il en soit ainsi.

Laissant a fixe, et faisant croître b, on prolonge $f(z)$ dans tout le cercle $|z| < 1$, soit C. D'autre part, si l'on donne à b deux valeurs b et $b' > b$ et si l'on prend z entre les courbes $\Gamma(a, b)$ et $\Gamma(a, b')$, l'intégrale (3) est égale à $F(z)$ sur le contour formé par les parties non communes de $\Gamma(a, b)$ et $\Gamma(a, b')$. On a donc, en supposant que $\Gamma(a, b)$ est parcourue dans le sens direct par rapport aux points de $E(a, b)$,

$$f(z) = F(z) + f_1(z) .$$

Comme on peut aussi faire varier a, on voit que $f(z)$ est bornée sauf dans les domaines correspondant à

$$|e^{\eta} \sin \xi| \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad \eta > b , \tag{4}$$

où $f(z)$ est la somme de $F(z)$ et d'une fonction bornée. Et dans le domaine (4), $F(z)$ croît indéfiniment lorsque $|z|$ tend vers un de la même façon que $g(\zeta)$. D'autre part, la dérivée de $f(z)$ est bornée dans les mêmes conditions que $g'(\zeta)$ puisque $\frac{d\zeta}{dz}$ tend vers un. Comme

$$g'(\zeta) = g(\zeta)\, e^{e^{-i\zeta}} e^{-i\zeta} - i$$

et que

$$\left| e^{e^{-i\zeta}} e^{-i\zeta} \right| = e^{\eta}\, e^{e^{\eta}\cos\xi}$$

on voit que $|g'(\zeta)|$ tend vers l'infini, dans tout le domaine (4), $f'(z)$ ne s'annule pas. Le point à l'infini est un point critique pour la fonction inverse $f_{-1}(Z)$ et il est isolé des points critiques algébriques.

On ne change pas ces résultats si l'on prend la somme de $f(z)$ et d'une fonction $k(z)$ dont la dérivée $k'(z)$ est bornée dans C et admet C comme coupure. La fonction $k(z)$ sera aussi bornée et d'après un théorème de Fatou et Riesz, $k(re^{i\theta})$ aura une limite lorsque r tendra vers 1, presque pour toutes les valeurs de θ et l'ensemble de ces valeurs limites formeront un ensemble non dénombrable.

Considérons les deux fonctions $f(z)$ et $f(z) + k(z)$. Si l'une tend vers une limite finie lorsque z décrit un chemin L tendant vers le cercle C, l'autre n'a pas de limite puisque $k(z)$ n'en a pas. Est-il possible que $f(z)$ ait une limite pour un chemin L et $f(z) + k(z)$ pour un chemin L' ? Ces deux chemins ne se couperont pas pour $|z|$ assez proche de 1 et limiteront un domaine D' de forme spiralique s'enroulant autour de C à l'intérieur de C [25]. La fonction $f(z)$ tend vers une limite sur L et est bornée dans ce domaine D'; $f(z) + k(z)$ tend vers une limite sur L' et est bornée dans le domaine D'. Représentons conformément D' sur un cercle $|v| < 1$. Aux deux chemins L et L' correspondront deux arcs de ce cercle aboutissant à un même point, $v = 1$, par exemple, correspondant à $|z|$ tendant vers 1. Alors à $f(z)$ et $f(z) + k(z)$ correspondent des fonctions $\varphi(v)$ et $\psi(v)$ bornées dans le cercle, tendant vers des limites lorsque v tend vers 1 sur la circonférence d'un côté de ce point pour $\varphi(v)$, de l'autre pour $\psi(v)$. D'après un théorème de Lindelöf, elles auront les mêmes

limites respectivement lorsque v tendra vers 1 sur l'axe réel. Et c'est impossible puisque la différence de $\varphi(v)$ et $\psi(v)$ n'a pas de limite.

Par suite, soit $f(z)$, soit $f(z) + k(z)$, n'a pas de limite possible autre que l'infini lorsque $|z|$ tend vers un. La fonction inverse $\Phi(Z)$ admet pour singularités uniquement des points critiques algébriques et le point à l'infini, qui est un point critique isolé et tel que lorsque Z tend vers ce point d'une façon quelconque, la valeur z de la fonction n'a aucune limite.

32. *Démonstration du théorème de Lindelöf.*

Par une transformation conforme du cercle en un demi-plan, puis du demi-plan en un angle, on est ramené à démontrer la proposition suivante: Supposons que $\Psi(z)$ soit holomorphe dans le secteur

$$|\arg z| < \frac{\pi}{6}, \qquad |z| < 1$$

qu'elle soit bornée par M dans le secteur, continue sur le côté $\arg z = \frac{\pi}{6}$ et tende vers zéro lorsque z tend vers zéro sur ce côté. Dans ces conditions, $\Psi(z)$ tend vers zéro lorsque z tend vers zéro sur la bissectrice $\arg z = 0$.

Prenons en effet z réel positif inférieur à $\eta < \frac{1}{2}$ et considérons la fonction

$$\Psi(z+\zeta)\,\Psi(z+\zeta\omega)\,\Psi(z+\zeta\omega^2)\,\Psi(z+\zeta\omega^3)\,\Psi(z+\zeta\omega^4)\,\Psi(z+ \\ +\zeta\omega^5), \qquad \omega = e^{\frac{i\pi}{3}}.$$

Elle est holomorphe dans l'hexagone limité par les droites obtenues en faisant tourner le côté $\arg z = \frac{\pi}{6}$ des angles $k\frac{\pi}{3}$, $k = 1, \ldots, 5$ autour du point z, et il s'ensuit que sur les côtés de cet hexagone, et par suite au centre, son module est au plus égal à ε, maximum de $|\Psi(z)|$ sur la portion du côté $\arg z = \frac{\pi}{6}$ qui fait partie de la frontière, multiplié par la borne de $|\Psi(z)|$ élevé à la puissance 5. Ceci démontre la proposition.

II. Singularités des fonctions inverses des fonctions méromorphes.

33. *Fonctions méromorphes en tout point à distance finie. Valeurs asymptotiques.*

Si $Z = f(z)$ est une fonction méromorphe en tout point à distance finie, mais qui ne se réduit pas à une fraction rationnelle, on peut construire un polynôme ou une fonction entière $g(z)$ admettant pour zéros les pôles de $f(z)$ avec les mêmes ordres de multiplicité. Le produit $f(z) \,.\, g(z)$ est alors une fonction entière, soit $h(z)$ de sorte que $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$; l'une au moins des deux fonctions $h(z)$, $g(z)$ qui sont sans zéros communs ne se réduit pas à un polynôme.

Considérons une courbe simple continue Γ dans le plan des z qui s'éloigne indéfiniment: une telle courbe est définie par une fonction $z(t)$ de la variable réelle t, définie pour $t \geqslant 0$ par exemple, telle que $z(t) \neq z(t')$ si $t \neq t'$ et telle que, si grand que soit A, il existe un nombre t_A pour lequel $|z(t)| \geqslant A$ si $t \geqslant t_A$. L'ensemble des valeurs $Z = f(z(t))$ pour $t \geqslant B$ est un ensemble continu, si nous ajoutons à cet ensemble ses points limites nous obtenons un ensemble $E(\Gamma, B)$ et lorsque B tend vers l'infini, l'ensemble limite de $E(\Gamma, B)$ est un ensemble, qui est l'ensemble commun aux $E(\Gamma, B)$; c'est un ensemble fermé $E(\Gamma)$ qui peut être une courbe, un point, tout le plan. Nous l'appellerons l'*ensemble d'indétermination de* f (z) *au point à l'infini de* Γ. Si cet ensemble se réduit à un point ω, nous dirons que ω est une *valeur asymptotique* de $f(z)$ et que la courbe Γ est un *chemin de détermination* ou *chemin de détermination* ω. Par exemple pour e^z, $z = x + iy$, la courbe $y = 0$, $x > 0$ est chemin de détermination infinie; $y = 0$, $x < 0$ est chemin de détermination 0; 0 et ∞ sont des valeurs asymptotiques. Mais pour $x = 0$, $y > 0$ l'ensemble d'indétermination à l'infini est la circonférence $|Z| = 1$; pour $x = \sin ky$, $y > 0$, k irrationnel, on obtient la couronne $\frac{1}{e} \leqslant |Z| \leqslant e$; et on voit comment on aura des chemins Γ d'indétermination complète pour lesquelles l'ensemble $E(\Gamma)$ sera le plan complet.

Si ω est valeur asymptotique pour $Z = f(z)$, il existe non seulement un chemin Γ de détermination ω, mais, à cause de la continuité, tout un ensemble de chemins de même détermination ω qui sont contigus à Γ. Deux chemins Γ, Γ' de même détermination ω sont contigus dans les deux cas suivants: 1° Γ et Γ' ont des points d'intersection aussi éloignés que l'on veut; 2° Γ et Γ' sont sans points communs à partir d'un point P qu'on peut considérer comme leur origine commune, ils déterminent alors deux domaines Δ et Δ'; dans l'un de ces domaines, soit Δ, existe une suite de courbes γ_n qui s'éloignent indéfiniment lorsque n croît indéfiniment, telles que chaque γ_n joint un point de Γ à un point de Γ' et que les valeurs de $f(z)$ sur γ_n tendent uniformément vers ω lorsque $n \to \infty$.

Une fonction méromorphe peut n'avoir aucune valeur asymptotique, c'est évidemment le cas pour les fonctions elliptiques. Mais *toute fonction entière admet ∞ comme valeur asymptotique.* C'est un cas particulier du théorème d'Iversen qui sera donné au n° 35.

Pour toute fonction entière de la classe W, il n'y a qu'une valeur asymptotique et tous les chemins de détermination sont contigus.

Sire a montré (*Bull. Soc. math.*, 1913) qu'une fonction entière d'ordre infini peut avoir une infinité non dénombrable de valeurs asymptotiques, Gross a construit un exemple de fonction entière dans lequel tout nombre complexe est valeur asymptotique (*Math. Ann.*, t. 79, 1918). Mais après avoir étudié certains cas particuliers, Denjoy a énoncé en 1907 la proposition suivante comme étant probable: une fonction entière d'ordre fini ρ a au plus 2ρ valeurs asymptotiques finies correspondant à des chemins non contigus. Carleman démontra en 1921 un résultat un peu moins précis; en 1930, Ahlfors démontra complètement le théorème de Denjoy; une démonstration différente fut donnée par Carleman en 1933 (*Comptes rendus*, t. 196).

Nous nous bornerons ici à démontrer la proposition élémentaire suivante:

Toute fonction méromorphe qui est le quotient de deux fonctions entières dont le module maximum vérifie la condition

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log M(r)}{(\log r)^2} < \infty \tag{5}$$

possède au plus une valeur asymptotique et n'en a pas en général [26].

On a, en effet,

$$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$$

avec

$$h(z) = \sum_0^\infty b_n z^n , \qquad g(z) = \sum_0^\infty a_n z^n , \tag{5}$$

et si c_n désigne le plus grand des deux nombres $| b_n |$ et $| a_n |$, la fonction

$$\varphi(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$$

vérifie aussi la condition (5), par suite

$$\varliminf_{n=\infty} \frac{-\log c_n}{n^2} > 0 .$$

On est dans le cas des fonctions à croissance lente du n° 16, on a pour les rapports rectifiés R_n la condition

$$\varlimsup_{n=\infty} \frac{R_{n+1}}{R_n} > 1 .$$

Si l'on prend m tel que $R_{m+1} > R_m k^2$, $k > 1$, $k R_m < r < k^2 R_m$, on obtient

$$\varphi(r) < c_m r^m \left(1 + \sum_1^\infty \left(\frac{r}{R_{m+1}}\right)^q + \sum_1^m \left(\frac{R_m}{r}\right)^q\right) < c_m r^m \left(1 + \frac{2}{k-1}\right) .$$

On considère la fonction $f(z)$ dans les couronnes

$$k R_m < | z | < k^2 R_m ;$$

en posant $z = R_m \zeta$, on a à étudier la suite de fonctions $f(R_m \xi)$ dans la couronne $k < | \zeta | < k^2$. Pour chaque m l'un des nombres $| b_m |$, $| a_m |$ est égal à c_m; on peut extraire de la suite des m une suite S pour laquelle on a constamment, par exemple $| a_m | = c_m$. On a dans la couronne envisagée

$$h(R_m \zeta) = c_m \zeta^m R_m^m H(\zeta, m) , \qquad g(R_m \zeta) = c_m \zeta^m R_m^m G(\zeta, m)$$

et les fonctions $H(\zeta, m)$ et $G(\zeta, m)$ sont bornées dans leur ensemble dans la couronne $k < |\zeta| < k^2$; on peut extraire de la suite S une autre suite pour laquelle $H|\zeta, m)$ et $G(\zeta, m)$ tendront respectivement, uniformément vers des fonctions limites holomorphes $H(\zeta)$ et $G(\zeta)$ (théorème de Montel). En outre, comme pour $|z| = r$, on a $M(r, g) > c_m r^m$, la fonction $G(\zeta)$ n'est pas identiquement nulle. La fonction $\frac{H(\zeta)}{G(\zeta)}$ est une fonction méromorphe ou une constante finie. Ainsi, pour une suite S′ de valeurs de m, $f(R_m \zeta)$ converge uniformément dans la couronne vers une fonction méromorphe (qui peut être une constante finie). Supposons que $f(z)$ admette une valeur asymptotique ω. Pour chaque m de la suite S′ existera une courbe Γ_m traversant la couronne $k < |\zeta| < k^2$ et sur Γ_m, $f(\zeta R_m)$ tendra vers ω. Il s'ensuit que $\frac{H(\zeta)}{G(\zeta)} \equiv \omega$ et que ω est fini. Dans les couronnes

$$k R_m < |z| < k^2 R_m$$

de la suite S′, la fonction $f(z)$ tend vers ω uniformément. ω est la seule valeur asymptotique possible et tous les chemins de détermination ω sont contigus.

Cette proposition, qui s'étend aux fonctions algébroïdes, fonctions $u(z)$ définies par

$$A_0(z) u^\nu + A_1(z) u^{\nu-1} + \cdots + A_\nu(z) = 0 ,$$

où les $A_j(z)$ sont des fonctions entières [27], a été étendue par Y. Tumura [28]. Mais il existe des fonctions méromorphes, quotients de fonctions entières pour lesquelles

$$\log M(r) < \psi(r) (\log r)^2 ,$$

où $\psi(r)$ est indéfiniment croissante, mais croissant moins vite qu'une fonction croissante donnée arbitrairement, qui ont autant de valeurs asymptotiques que l'on veut [29].

34. *Singularités des fonctions inverses des fonctions méromorphes.*

Hurwitz et Denjoy, en 1907, dans le cas des fonctions entières et Iversen (thèse, Helsingfors, 1914) dans le cas général des

fonctions méromorphes sauf à l'infini, ont montré que les singularités de la fonction inverse qui ne sont pas des points critiques algébriques sont les valeurs asymptotiques de la fonction. Si $Z = f(z)$ est la fonction méromorphe donnée, sa fonction inverse $z = \Phi(Z)$ est définie par l'ensemble de ses éléments. Si z_0 est un point en lequel $f'(z_0) \neq 0$, la fonction $f(z)$ est holomorphe et univalente pour $|z - z_0| < r$ si $Z_0 = f(z_0) \neq \infty$, ce qui définit autour de Z_0 un élément de la fonction inverse holomorphe dans un cercle $|Z - Z_0| < R$. Si $Z_0 = \infty$, on définit un élément holomorphe au point à l'infini du plan Z. On peut passer de l'un de ces éléments de $\Phi(Z)$ à un autre par prolongement analytique: il suffit de joindre le point z_0 fournissant l'élément $\Phi(Z, Z_0, z_0)$ au point z_1 du plan z fournissant $\Phi(Z, Z_1, z_1)$, par une ligne polygonale ne passant par aucun des zéros de $f'(z)$ pour obtenir ce prolongement. On définit en même temps des éléments circulaires de la surface de Riemann sur laquelle $\Phi(Z)$ sera uniforme. Si au point z_0, Z_0 est fini, mais $f'(z_0) = 0$, on a pour $|z - z_0| < r$,

$$Z = f(z) = Z_0 + c_p (z - z_0)^p + \cdots, \qquad p > 1$$

ce qu'on peut écrire, en posant $Z - Z_0 = u^p$,

$$u = \sqrt[p]{c_p}\,(z - z_0)\,[1 + \Psi(z - z_0)]^{\frac{1}{p}}, \tag{6}$$

la série entière $\Psi(z - z_0)$ définissant une fonction holomorphe et nulle pour $z = z_0$. La racine d'ordre p définit p fonctions holomorphes qui se déduisent de l'une d'elles par multiplication par les racines de l'unité. On peut faire l'inversion dans (6), on obtient

$$z - z_0 = \frac{u}{\sqrt[p]{c_p}}\,(1 + \Theta(u))$$

et, en remplaçant u par la racine d'ordre p de $Z - Z_0$ on obtient une fonction à p branches, régulières en chaque point dans un domaine $0 < |Z - Z_0| < r$, qui se permutent entre elles par rotation autour de Z_0. Le point Z_0 est un point critique algé-

brique de $\Phi(Z)$, la fonction est bien définie en ce point et autour de ce point par

$$z = z_0 + \frac{(Z - Z_0)^{\frac{1}{p}}}{c_p^{\frac{1}{p}}}\left[1 + \Theta\left((Z - Z_0)^{\frac{1}{p}}\right)\right].$$

On a un élément algébrique de $\Phi(Z)$ autour de Z_0, défini dans un certain cercle de centre Z_0. On incorpore le point Z_0 à la surface de Riemann décrite par $Z = f(z)$. Si $Z_0 = \infty$, on opère sur $\frac{1}{Z}$ et l'on obtient un élément algébrique lorsque la racine est multiple

$$z = z_0 + \frac{1}{(c_p Z)^{\frac{1}{p}}}\left[1 + \Theta\left(Z^{-\frac{1}{p}}\right)\right].$$

Autour d'un point critique algébrique, l'élément de la surface de Riemann est composé de p feuillets circulaires ayant pour centre ce point et qui se raccordent le long de rayons superposés. Le passage d'un élément holomorphe ou algébrique à un autre se fait encore en considérant dans le plan des z une ligne joignant les deux points correspondant aux deux centres, donc au moyen d'un nombre fini d'éléments intermédiaires tels que chacun d'eux est un prolongement du précédent. Nous appellerons $\Phi(Z, Z_0, z_0)$ un élément holomorphe ou algébrique, la notation désignant à la fois la série qui définit l'élément et le cercle de convergence de cette série.

Supposons que le point Z décrive la surface de Riemann, ce qui revient à dire que l'on fait le prolongement analytique à partir d'un élément $\Phi(Z, Z_0, z_0)$. Utilisons uniquement les éléments holomorphes. Si l'on fait décrire à Z' une ligne γ tracée sur la surface et si l'on considère les éléments $\Phi(Z, Z', z')$, lorsque γ aboutit à un point non critique Z_1, le rayon de $\Phi(Z, Z', z')$ tend vers le rayon $\Phi(Z, Z_1, z_1)$ de l'un des éléments de centre Z_1. Si Z_1 est point critique algébrique, dès que Z' sera assez voisin de Z_1, le point Z_1 sera un point singulier de l'élément $\Phi(Z, Z', z')$, le rayon de cet élément tendra vers zéro [30]. *Les autres points singuliers de la surface sont des points qui ne lui*

appartiennent pas mais dont on peut approcher d'aussi près que l'on veut en restant sur la surface, donc par prolongement analytique. Lorsqu'on fait le prolongement, on doit pouvoir trouver une courbe γ de la surface qui s'approche autant que l'on veut du point en question Ω, c'est-à-dire qui reste dans un cercle de centre Ω et de rayon aussi petit que l'on veut à partir d'un de ses points, et telle que le prolongement est possible le long de γ, *le rayon des éléments* $\Phi(Z, Z', z')$ *dont les centres* Z' *sont sur* γ *tendant vers zéro lorsque* $|Z' - \Omega|$ *tend vers zéro* [31]. Lorsqu'il existera un élément algébrique $\Phi(Z, \Omega, z_k)$, $\Omega = f(z_k)$, tel que $\Phi(Z, Z', z')$ coïncide à partir d'une valeur de Z' avec $\Phi(Z, \Omega, z_k)$ dans la partie commune des cercles de convergence, le point Ω sera simplement un point critique algébrique, sinon ce sera vraiment un point singulier sur un feuillet ou plusieurs feuillets de la surface de Riemann et de la fonction inverse $\Phi(Z)$.

Nous allons préciser un peu la façon dont se comportent les éléments $\Phi(Z, Z', z')$. Il est possible que certains de ces éléments contiennent le point Ω, c'est-à-dire que, pour certains Z', avec $Z' - \Omega$ tendant vers zéro, $\Phi(Z, Z', z')$ prenne la valeur Ω; donc que cet élément et un $\Phi(Z, \Omega, z_k)$ coïncident dans la portion commune de leurs cercles de convergence, *mais il n'est pas possible que cela ait lieu pour tous les* Z' *de* γ *suffisamment proches de* Ω. Car si $\Phi(Z, Z', z')$ contenait Ω pour tous les Z' de γ à partir de l'un d'eux, Z' variant continûment, $\Phi(Z, Z', z')$ aurait une portion commune avec un même élément $\Phi(Z, \Omega, z_k)$, de rayon $R(z_k)$ et dès que $|Z' - \Omega|$ serait inférieur à $\frac{1}{2} R(z_k)$, le rayon de l'élément $\Phi(Z, Z', z')$ serait au moins $\frac{1}{2} R(z_k)$, il ne tendrait pas vers zéro.

Inversement, *s'il existe une courbe* γ *tendant vers* Ω *le long de laquelle le prolongement est possible et s'il existe des* Z' *sur cette courbe aussi proches que l'on veut pour lesquels* $\Phi(Z, Z', z')$ *ne contient pas* Ω, Ω *est point singulier.* Car les rayons des éléments ne contenant pas Ω tendent vers zéro. Si un élément $\Phi(Z, Z'', z'')$ contient Ω et si à partir de ce point Z'' de γ, $|Z' - \Omega| < \varepsilon$, le rayon de cet élément est au plus 3ε, sinon tous les points de γ à partir de Z'' appartiendraient à $\Phi(Z, Z'', z'')$, et puisque $|Z' - Z''| < 2\varepsilon$, tous les $\Phi(Z, Z', z')$ contiendraient Ω.

On a utilisé seulement les éléments holomorphes, donc on a supposé que la courbe γ ne passe pas par les points critiques algébriques. Si l'on prend une courbe passant par ces points, on peut la déformer d'aussi peu que l'on veut au voisinage de chacun de ces points sans qu'elle cesse d'être sur la surface. Il s'ensuit qu'on peut utiliser tous les éléments aussi bien algébriques qu'holomorphes dans la définition des points singuliers.

Ces explications données, on va montrer que *lorsque le point* Z *tend vers un point singulier (non algébrique) de la surface de Riemann*, $z = \Phi(Z)$ *tend vers l'infini, c'est-à-dire que les singularités de la surface correspondent nécessairement aux valeurs asymptotiques de* $Z = f(z)$.

Dans un cercle $|z| \leqslant M$, l'équation $f(z) = \Omega$ a un nombre fini de racines (si Ω est infini, il s'agit des pôles), on peut isoler ces racines z_k par des petits cercles de centres z_k, extérieurs les uns aux autres et de rayons assez petits pour que, lorsque z est dans le cercle de centre z_k, $Z = f(z)$ appartienne à l'élément $\Phi(Z, \Omega, z_k)$. On peut d'ailleurs supposer que M a été choisi de façon qu'il n'y ait pas de points z_k sur la circonférence $|z| = M$ et enfin que les petits cercles ne coupent pas cette circonférence. La fonction $\frac{1}{f(z) - \Omega}$ est holomorphe dans $|z| \leqslant M$ à l'extérieur des petits cercles et sur leurs circonférences, son module a un maximum $\frac{1}{\varepsilon}$. Dans ces conditions, si $|Z - \Omega| < \varepsilon$, le point $z = \Phi(Z)$ est ou bien extérieur au cercle $|z| \leqslant M$ ou bien intérieur à l'un des petits cercles. Or lorsque Z tend vers le point singulier Ω, il ne peut pas appartenir à un même élément $\Phi(Z, \Omega, z_k)$, donc $|z| > M$, ce qui démontre la proposition.

Inversement, si ω est valeur asymptotique de $Z = f(z)$, c'est une singularité (non algébrique évidemment) de la fonction inverse. Car lorsque z' décrit le chemin Γ de détermination ω, $Z' = f(z')$ décrit une courbe γ qui se rapproche indéfiniment du point ω et le rayon de l'élément $\Phi(Z, Z', z')$ tend vers zéro. Sinon on aurait pour un élément $\Phi(Z, Z'', z'')$ un rayon supérieur à 3ε, et à partir de cette valeur Z'', on aurait $|Z' - \omega| < \varepsilon$, les Z' appartiendraient à l'élément $\Phi(Z, Z'', z'')$, ce qui est impossible puisque $z' = \Phi(Z', Z'', z'')$ serait alors borné.

En définitive:

Les singularités (autres que les singularités algébriques) de la surface de Riemann décrite par les valeurs d'une fonction méromorphe $f(z)$ *dans tout le plan à distance finie correspondent aux valeurs asymptotiques de cette fonction. A deux chemins* Γ, Γ' *de détermination* ω *qui sont contigus correspondent des courbes* γ *et* γ' *aboutissant à* ω *et telles que l'on peut les joindre par des courbes de la surface de Riemann qui sont aussi voisines que l'on veut de* ω, *ces chemins* γ, γ' *doivent être considérés comme aboutissant à une seule singularité* ω.

Les surfaces de Riemann correspondant aux fonctions entières de la classe W ont donc une seule singularité qui est à l'infini.

35. *Théorèmes de Lindelöf et d'Iversen.*

Lindelöf a étendu le théorème de Cauchy sur le maximum du module. Nous nous bornerons à l'énoncé suivant:

THÉORÈME DE LINDELÖF. — *Soit un domaine borné* D *de frontière* F *et une fonction* $f(z)$ *holomorphe dans* D *et continue sur* $D + F$ *sauf en un point* O *de* F. *Si* $|f(z)| \leqslant M$ *sur* F *sauf en* O *et si* $|f(z)| < K$ *dans* D *au voisinage de* O, *on a dans tout* D

$$|f(z)| \leqslant M$$

Comme D est borné, on peut par transformation homographique se ramener au cas où O est l'origine et où D est dans le cercle $|z| < 1$. Dans ces conditions, si $\varepsilon > 0$, la fonction $z^\varepsilon f(z)$ n'est pas surement holomorphe dans D, mais seulement analytique, mais le théorème de Cauchy s'applique encore à son module qui est uniforme. Sur F, O excepté, on a $|z^\varepsilon f(z)| \leqslant M$. Soit z_0 un point de D; prenons r assez petit pour que, pour $|z| < r$ on ait $|f(z)| < K$ et par suite $|z^\varepsilon f(z)| < K r^\varepsilon$; on pourra prendre r assez petit pour que $K r^\varepsilon < M$ et $r < |z_0|$. Appliquons le théorème de Cauchy à $z^\varepsilon f(z)$ dans le domaine formé par la portion de D contenant z_0 et extérieure à $|z| \leqslant r$. Comme sur la frontière constituée par des points de F et de $|z| = r$, le module est au plus M, on aura aussi au point z_0

$$|z_0^\varepsilon f(z_0)| \leqslant M .$$

Donc $|f(z_0)| \leqslant M e^{-\varepsilon \log |z_0|}$ et puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire

$$|f(z_0)| \leqslant M .$$

Il est clair que le théorème s'applique à un domaine D quelconque mais tel qu'il y ait des points extérieurs permettant de se ramener au cas de l'énoncé.

De ce théorème, on déduit le suivant qui servira de lemme pour la démonstration du théorème d'Iversen [32]:

THÉORÈME II. — *Si la fonction* f (z) *est holomorphe dans un domaine borné* D *et continue sur* D *et sur la frontière* F *sauf en un point* O *de* F*; si sur* F, O *excepté*, $|f(z)| = M$ *tandis que* $|f(z)| < M$ *dans* D, *on a deux alternatives:* 1° f (z) *s'annule en un point au moins de* D; 2° *il existe dans* D *une courbe continue aboutissant à* O *sur laquelle* f (z) *tend vers zéro lorsque* z *tend vers* 0.

Supposons que $f(z)$ ne s'annule pas dans D. Alors $\frac{1}{f(z)}$ est holomorphe dans D; et sur F, O excepté $\left|\frac{1}{f(z)}\right| = \frac{1}{M}$; donc $\frac{1}{f(z)}$ n'est pas bornée au voisinage de O, sinon, d'après le théorème de Lindelöf, on aurait dans D, $\left|\frac{1}{f(z)}\right| \leqslant \frac{1}{M}$ en contradiction avec l'hypothèse $|f(z)| < M$. Il existe donc un domaine D_1 intérieur à D et admettant O comme point frontière dans lequel $\left|\frac{1}{f(z)}\right| > \frac{2}{M}$. Dans D_1 on a $|f(z)| < \frac{M}{2}$; sur sa frontière, O excepté, $|f(z)| = \frac{M}{2}$ et $f(z)$ ne s'annule pas dans D_1. On peut recommencer le raisonnement indéfiniment. On peut joindre un point de F à un point z_1 de la frontière de D_1 (autre que O) par un chemin intérieur à D, puis z_1 à un point z_2 en lequel $|f(z_2)| = \frac{M}{4}$ par un chemin appartenant à D_2, et ainsi de suite, ce qui définit une courbe γ de D sur laquelle $|f(z)|$ tend vers zéro. γ est composée d'arcs successifs $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots$, l'arc γ_n appartenant à D_n. Les arcs γ_n n'ont pas de points limites intérieurs à D puisqu'en un tel point on aurait $f(z) = 0$, leur seul point d'accumulation est O.

THÉORÈME D'IVERSEN. — *Soit* Σ *la surface de Riemann décrite par les valeurs d'une fonction méromorphe, c'est-à-dire une*

surface simplement connexe du type parabolique. Soit Z_0 *un point du plan et* Z_1 *un point de la surface* Σ, $|Z_0 - Z_1| = \rho$. *Il est possible de joindre* Z_1 *à* Z_0 *par une courbe intérieure au cercle* $|Z - Z_0| < \rho$ *qui appartient à la surface sauf peut-être son extrémité* Z_0.

Considérons, en effet, dans le plan z le domaine D défini par $|f(z) - Z_0| < \rho$ qui contient le point $z_1 = \Phi(Z_1)$ sur sa frontière F. Si le domaine D contient un point z_0 en lequel $f(z_0) = Z_0$ la proposition est établie. Dans le cas contraire, D n'est pas borné (sinon dans D borné $\frac{1}{f(z) - Z_0}$ holomorphe n'atteindrait pas son maximum sur le contour). Mais on peut le ramener à un domaine borné par transformation homographique et appliquer le théorème II; il s'ensuit que dans D on a un chemin joignant z_1 au point à l'infini sur lequel $f(z)$ tend vers Z_0. Le cas où le chemin considéré dans l'énoncé n'a pas son extrémité dans Σ est celui où Z_0 est valeur asymptotique.

Du théorème d'Iversen on déduit que si Z_1 est un point de Σ et L une courbe simple issue de Z_1, on peut tracer un chemin qui joint Z_1 au voisinage d'un point de L en restant dans le voisinage de L. Il suffit d'appliquer le théorème de proche en proche à des petits cercles centrés sur L et suffisamment rapprochés.

Comme corollaire, on voit que *si une valeur* Ω *n'est pas prise par une fonction méromorphe, cette valeur est valeur asymptotique.* En particulier, *pour toute fonction entière, l'infini est valeur asymptotique.*

36. *Théorème de Gross.*

Si l'on considère un élément $\Phi(Z, Z_0, z_0)$, $Z_0 \neq \infty$ *holomorphe de la fonction inverse* $z = \Phi(Z)$ *d'une fonction méromorphe, on peut prolonger cet élément jusqu'à l'infini sur les rayons* $\arg(Z - Z_0) = \varphi =$ *const. sauf au plus pour des* φ *appartenant à un ensemble de mesure nulle.*

Pour l'établir, on peut se borner à considérer les rayons $\arg(Z - Z_0) = \varphi$ dans un cercle $|Z - Z_0| < R$. Car si l'on peut atteindre la circonférence de ce cercle sauf pour un ensemble de mesure nulle de valeurs φ, il suffira de donner à R les valeurs

1, 2, ..., n, ... et comme une suite d'ensembles de mesures nulles est de mesure nulle, le théorème sera démontré.

D'autre part, l'ensemble E_1 des valeurs de φ pour lesquelles le rayon passe par un point critique algébrique $Z_k = f(z_k)$, $f'(z_k) = 0$ est dénombrable, ce sont les rayons passant par un point critique transcendant qui sont seuls à considérer.

Nous faisons donc le prolongement radial de l'élément $\Phi(Z, Z_0, z_0)$ dans le cercle $|Z - Z_0| < R$, R étant supérieur au rayon R_0 du cercle d'holomorphie de cet élément, et nous supposons que dans ce prolongement nous rencontrons des points critiques transcendants. Nous définissons un domaine Ω qui contient le cercle $|Z - Z_0| < R_0$ et dans lequel $z = \Phi(Z)$ est holomorphe. A ce domaine correspond dans le plan des z un domaine ω contenant le cercle $|z - z_0| < r_0$ dans lequel $Z = f(z)$ est univalente et holomorphe et qui n'est pas borné puisqu'il contient des chemins de détermination. Si l'on coupe ce domaine par une circonférence $|z - z_0| = r$, on obtient sur cette circonférence des arcs A_r de longueur totale $s(r)$. A ces arcs correspondent des arcs de courbes du plan des Z qui coupent les rayons $|Z - Z_0| = \varphi$ passant par les points critiques transcendants puisque, à ces rayons correspondent des chemins de détermination finie allant à l'infini et intérieurs à ω. Si l'on considère les valeurs de φ correspondant à ces arcs, elles forment des intervalles dont la longueur est au moins égale au produit de $s(r)$ par $\frac{1}{d}$, d étant la plus courte distance de ces arcs à l'origine Z_0. Cette plus courte distance d est supérieure à la plus courte distance de la courbe transformée de $|z - z_0| = r_0$, donc à un nombre fixe d_0. Les intervalles contenant l'ensemble $E - E_1$ des φ pour lesquels le prolongement est impossible ont donc une longueur au plus égale à $\frac{s(r)}{d_0}$. Or on a

$$s(r) = \int_{A_r} |f'(z)|\, dt = \int_{A_r} |f'(z)|\, r d\varphi\,, \qquad z = re^{i\varphi}\,,$$

donc d'après la formule de Schwarz

$$s(r)^2 \leqslant \int_{A_r} |f'(z)|^2\, r d\varphi \cdot 2\pi r$$

et comme A (r) étant l'aire de Ω correspondant à la portion de ω limitée par $|z - z_0| = r$, on a

$$A(r) = \int_0^r \int_0^{2\pi} |f'(z)|^2 \, r dr \, d\varphi ,$$

l'inégalité s'écrit

$$s(r)^2 \leqslant 2\pi r \frac{d\,A(r)}{dr} .$$

On a donc

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{s(r)^2 \, dr}{r} \leqslant 2\pi [A(r) - A(r_0)] < 2\pi^2 R^2 .$$

Ceci montre que $s(r)$ a pour limite inférieure pour r infini la valeur 0 puisque, dans le cas contraire le premier membre de cette inégalité serait infini. On a donc des r pour lesquels $s(r) < \varepsilon$ ce qui montre que les points de $E - E_1$ appartiennent à des intervalles dont la somme des longueurs est aussi petite que l'on veut. $E - E_1$ est de mesure nulle et le théorèmees t démontré.

37. *Classification d'Iversen.*

Si ω est une singularité transcendante de la fonction inverse $z = \Phi(Z)$, c'est-à-dire aussi de la surface de Riemann, il existe un chemin γ_ω le long duquel un élément $\Phi(Z, Z', z')$ prolongé le long de γ_ω tend vers ∞, ce chemin γ_ω tendant vers ω. Supposons ω fini, sinon on considérerait Φ comme fonction de $\frac{1}{Z}$. A partir d'un point Z'' de γ_ω, ce chemin reste dans le cercle C_R, $|Z - \omega| < R$; si Z' est un point de cette portion on peut prolonger $\Phi(Z, Z', z')$ à partir de cet élément en restant dans C_R. *Si, en opérant ainsi à partir de* γ_ω, *on peut choisir* R *assez petit pour qu'on ne rencontre pas d'autres singularités transcendantes que* ω, *on dit que* ω *est une singularité transcendante isolée.* Le prolongement effectué dans C_R définit un morceau Σ_ω^R de la surface de Riemann auquel la fonction $z = \Phi(Z)$ fait correspondre un domaine D_ω^R du plan des z; c'est un domaine illimité qui contient des chemins de détermination ω et qui ne contient pas d'autres chemins de détermination; en faisant décroître R, on voit que tous ces chemins de détermination ω sont contigus.

Iversen a donné dans sa Thèse (1914) une classification des

singularités transcendantes isolées qui complète et précise un essai antérieur de Boutroux.

Si l'on peut choisir R assez petit pour que Z ne prenne pas la valeur ω dans C_R, c'est-à-dire si ω n'appartient pas à Σ_ω^R, ou encore si $f(z)$ ne prend pas la valeur ω dans D_ω^R, le point ω est appelé *point transcendant directement critique.* En outre, si l'on peut choisir R assez petit pour que $\Phi(Z)$ n'admette pas de singularités algébriques dans C_R, ω *est dit de première espèce*; dans le cas contraire, ω est point limite de points critiques algébriques, il est dit de *seconde espèce.*

Si ω n'est pas directement critique, il existe des éléments $\Phi(Z, Z', z')$, avec $|Z' - \omega| < \varepsilon$, qui contiennent ω, autrement dit D_ω^R contient des racines de $f(z) - \omega$ si petit que soit R. Si sur tout rayon $\arg(Z' - \omega) = \text{const.}$, $\Phi(Z, Z', z')$ où $\Phi(Z, Z', z')$ peut être un élément algébrique, tend vers une valeur finie, ou si l'on préfère si la valeur de $\Phi(Z)$ finit par coïncider avec un élément $\Phi(Z, \Omega, z_k)$ lorsque Z tend vers ω sur un rayon de C_R, le point ω est dit *point transcendant indirectement critique.*

Un point critique transcendant (qui est isolé) n'appartenant pas à l'une ou l'autre de ces deux catégories est dit *point directement et indirectement critique.*

Ahlfors a montré que le nombre des chemins d'indétermination finie non contigus des fonctions entières d'ordre ρ est au plus égal à 2ρ, il s'ensuit que le nombre de singularités à l'infini, pour $\rho > \frac{1}{2}$ est aussi au plus égal à 2ρ, ainsi que le nombre des singularités transcendantes à distance finie. Nous admettrons ces résultats qui rentrent dans un énoncé plus général dû à Ahlfors [33].

Si $Z = f(z)$ est une fonction entière d'ordre fini, toutes les singularités transcendantes de la fonction inverse sont isolées; la classification d'Iversen s'applique. Si ω est singularité transcendante à distance finie, le domaine D_ω^R qui est illimité est borné par un nombre fini de courbes. Car si D_ω^R est ce domaine et si sa frontière sur laquelle $|f(z) - \omega| = R$ comporte une courbe illimitée Γ, cette courbe Γ est aussi frontière d'un domaine non borné dans lequel $|f(z) - \omega| < R$. D'après le théorème du n° 35, ce domaine contient un chemin de détermination infinie. A chaque frontière Γ correspond un chemin de détermination

infinie et les chemins ainsi obtenus pour deux frontières ne sont pas contigus; il n'y en a qu'un nombre fini. Alors, en diminuant R on voit que l'on aura une seule courbe frontière. Par suite

Si f (z) *est fonction entière d'ordre fini et si* ω *est une valeur asymptotique finie, le domaine* $|f(z) - \omega| > \varepsilon$ *contenant les chemins de détermination* ω *est limité par une seule courbe dès que* ε *est assez petit.*

On voit de même que si ω est fini et directement critique et si ω' est une singularité algébrique appartenant à C_R, les courbes $|f(z) - \omega| = |\omega' - \omega|$ décomposent D_ω^R en au moins deux domaines d'indétermination finie; on pourra, d'après ce qui précède, prendre R assez petit pour que cette circonstance soit impossible. Donc

Pour une fonction entière d'ordre fini, les points directement critiques à distance finie de la fonction inverse sont tous de première espèce.

Mais les singularités transcendantes à l'infini, *qui sont directement critiques puisque* f (z) *ne prend pas la valeur infinie*, peuvent être de seconde espèce. On a vu (n° 29) que la singularité à l'infini des fonctions inverses des fonctions de la classe W est de seconde espèce.

38. *Remarques sur la décomposition en feuillets de la surface de Riemann. Feuillets singuliers et division impropre.*

L'idée la plus simple pour décomposer en feuillets la surface de Riemann décrite par les valeurs Z d'une fonction $f(z)$ que nous supposerons entière et d'ordre fini est d'utiliser les étoiles d'holomorphie de la fonction inverse $z = \Phi(Z)$. On considère les éléments $\Phi(Z, 0, z_k)$, $f(z_k) = 0$ et on les prolonge radialement après avoir coupé le long d'une demi-droite arg Z = const., si l'élément est algébrique. On obtient ainsi des feuillets (qui pour toute fonction inverse de fonction méromorphe sont illimités d'après le théorème de Gross) qui dans le cas actuel sont des domaines dont les frontières sont des demi-droites, arg Z = const., formant sur chaque feuillet un ensemble dénombrable. A ces feuillets correspondent dans le plan des z des domaines limités par des courbes d'argument constant. Si ces domaines, leurs frontières et les points limites de ces fron-

tières couvrent le plan des z en entier à distance finie, on a fait à la fois la division du plan des z en domaines d'univalence et la division de la surface de Riemann en feuillets dont le raccordement est donné par la considération du plan des z. Dans le cas contraire, l'origine est point critique transcendant; s'il y a à l'origine un point directement critique, il est de première espèce et l'on a une infinité de feuillets aboutissant à l'origine; s'il y a un point directement et indirectement critique il peut exister des feuillets incomplets aboutissant à l'origine, dont l'angle d'ouverture est moindre que 2π.

On peut éviter les feuillets de cette dernière espèce en changeant Z en $Z + k$ de façon à n'avoir plus de singularité transcendante à l'origine. Toute la surface de Riemann est alors fournie par les feuillets obtenus en prolongeant les éléments $\Phi(Z, 0, z_k)$. Mais il pourra arriver que sur certains feuillets la frontière ne soit pas entièrement accessible par suite de la présence d'un point critique transcendant qui, d'après les propositions du n° 37, ne peut pas être directement critique puisqu'il serait isolé des singularités algébriques, et qui n'est pas indirectement critique puisqu'on ne pourrait pas l'atteindre par prolongement radial, c'est donc un point directement et indirectement critique. Le domaine correspondant du plan des z sera un *domaine complet singulier d'univalence*; dans ce domaine et sur sa frontière à distance finie, $f(z)$ prend des valeurs dont l'ensemble complémentaire contient une ligne.

La jonction des feuillets, c'est-à-dire des domaines d'univalence, peut aussi présenter des anomalies. Il peut se faire que pour passer d'un feuillet à un autre il soit nécessaire de passer sur une infinité d'autres feuillets. On aura une *division impropre du plan* z *en domaines d'univalence.*

La fonction

$$Z = \frac{e^z - 1}{z} + h$$

où h est une constante présente des circonstances de ce genre. Dans le cas $h = 0$, déjà étudié par Iversen, la division en feuillets par les lignes arg Z = const., fournit un feuillet incomplet; pour $h = -1$, il existe un feuillet singulier [34]; pour $h = 1$, on obtient une division impropre.

L'étude de la division du plan des z en domaines complets d'univalence pour une fonction méromorphe générale $Z = f(z)$ a été l'objet de travaux de Shimizu [25] et de Marty. Elle demande de nouveaux efforts.

39. *Remarque sur les surfaces du type hyperbolique.*

Si l'on considère une fonction $Z = f(z)$ méromorphe pour $|z| < 1$ et admettant la circonférence $|z| = 1$ comme coupure, sa fonction inverse est uniforme sur une surface du type hyperbolique dont l'étude des singularités est peu avancée. Les valeurs asymptotiques sont ici les valeurs limites sur des chemins tendant vers la circonférence C, $|z| = 1$. Les considérations du n° 34 s'étendent, les singularités de la fonction inverse autres que les singularités algébriques sont fournies par les valeurs asymptotiques. Le théorème d'Iversen n'est plus valable en général non plus que le théorème de Gross dont la démonstration tombe évidemment en défaut.

La fonction spéciale étudiée au n° 31 rentre dans la classe générale des fonctions holomorphes et non bornées pour $|z| > 1$ telles que chaque $F(z)$ est bornée sur un chemin simple $L = L(F)$, $z = z(t; F)$, $t \geqslant 0$ avec $\lim\limits_{t=\infty} |z(t, F)| = 1$, tout point de $|z| = 1$ étant point limite des valeurs $z(t, F)$. Le théorème d'Iversen s'étend à ces fonctions. Lorsqu'on suppose que sur $L(F)$ l'une des limites d'indétermination de $z(t)$ pour t infini est infinie, on a

$$\overline{\lim_{r\to 1}} \frac{\log_3 M(r, F)}{\log \dfrac{1}{1-r}} \geqslant 1 .$$

la croissance est très rapide.

III. Caractéristique de Nevanlinna et propriété de $N(r, Z)$.

40. *Fonction* T (r, f) *de Nevanlinna.*

On a vu (n° 18) que, si $f(z)$ est méromorphe pour $|z| \leqslant r$, si $f(0) \neq 0, \infty$ et si $n(x)$ désigne le nombre des zéros et $p(x)$ le nombre des pôles pour $|z| \leqslant x$, on a

$$\int_0^r \frac{n(x)\,dx}{x} - \int_0^r \frac{p(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi - \log\left|f(0)\right| .$$

Si $f(0)$ est nul ou infini, on peut appliquer la formule à $\frac{f(z)}{z^q}$ si q est l'ordre du zéro à l'origine, à $f(z)\,z^q$ si l'on a un pôle d'ordre q, de sorte que, en désignant par c_q la limite pour $z = 0$ de $f(z)/z^q$ ou de $f(z)\,z^q$, on a

$$\int_0^r \frac{n(x) - n(0)}{x}\,dx - \int_0^r \frac{p(r) - p(0)}{x}\,dx \pm q \log r = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi - \log\left|c_q\right| .$$

On a $q = n(0)$ et le signe $+$ si l'origine est zéro, $q = p(0)$ et le signe $-$ si l'origine est pôle. Par suite, si l'on désigne d'une façon générale par $n(x, \mathrm{Z})$ le nombre des zéros de $f(z) - \mathrm{Z}$ pour $|z| \leqslant x$, et si l'on pose

$$\mathrm{N}(r, \mathrm{Z}) = \int_0^r \frac{n(x, \mathrm{Z}) - n(0, \mathrm{Z})}{x}\,dx + n(0, \mathrm{Z}) \log r ,$$

on a

$$\mathrm{N}(r, 0) - \mathrm{N}(r, \infty) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi - \log\left|c_q\right| . \qquad (1)$$

Dans l'intégrale, on peut séparer les parties où $\log\left|f(re^{i\varphi})\right|$ est positif de celles où cette quantité est négative. Si l'on désigne par u^+ le nombre égal à u si u est réel positif et 0 si $u \leqslant 0$, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|\frac{1}{f(re^{i\varphi})}\right| d\varphi .$$

Si l'on désigne d'une façon générale par $m(r, a)$ l'intégrale

$$m(r, a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|\frac{1}{f(re^{i\varphi}) - a}\right| d\varphi , \quad \left(m(r, \infty) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi\right)$$

la formule (1) s'écrit

$$\mathrm{N}(r, 0) - \mathrm{N}(r, \infty) = m(r, \infty) - m(r, 0) - \log\left|c_q\right|$$

ou

$$N(r, \infty) + m(r, \infty) = N(r, 0) + m(r, 0) + \log |c_q| .$$

Le premier membre est la caractéristique $T(r)$ ou $T(r, f)$ de Nevanlinna.

41. *Théorèmes de H. Cartan. Propriété de* T (r).

θ étant réel, appliquons la formule de Jensen (1) à $f(z) - e^{i\theta}$. Nous aurons

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\varphi}) - e^{i\theta}| \, d\varphi - \log |f(0) - e^{i\theta}| = N(r, e^{i\theta}) - N(r, 0) . \tag{2}$$

Multiplions les deux membres par $\frac{d\theta}{2\pi}$ et intégrons de 0 à 2π. Nous aurons, d'après la formule de Jensen appliquée à la fonction $u - f(0)$, $|u| = 1$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |f(0) - e^{i\theta}| \, d\theta = \log^+ |f(0)|$$

car, si $|f(0)| > 1$, $u - f(0)$ ne s'annule pas dans le cercle $|u| < 1$, et si $|f(0)| < 1$, il y a un zéro, qui est $f(0)$, le second membre est alors $\log |f(0)| + \log \frac{1}{|f(0)|} = 0$.

D'autre part,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\varphi}) - e^{i\theta}| \, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\varphi}) - e^{i\theta}| \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi})| \, d\varphi = m(r, \infty) .$$

On déduit donc de (2)

$$T(r, f) = m(r, \infty) + N(r, \infty) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r, e^{i\theta}) \, d\theta + \log^+ |f(0)| . \tag{3}$$

Ceci suppose $|f(0)| \neq \infty$. Si l'origine est pôle, on aura à mettre $\log^+ |c_q|$ au lieu de $\log^+ |f(0)|$.

Comme $N(r, e^{i\theta})$ est une fonction convexe non décroissante de $\log r$, la formule (3) de Cartan montre qu'il en est de même de $T(r, f)$. Mais on peut aussi écrire, en remplaçant $N(r, e^{i\theta})$ par sa valeur, $n(0, e^{i\theta})$ n'étant différent de 0 que pour une valeur au plus de θ,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r, e^{i\theta})\, d\theta = \int_0^r \frac{dx}{x}\int_0^{2\pi} n(x, e^{i\theta})\, d\theta$$

ce qui donne le théorème de Cartan [36].

La fonction T (r, f) *a une dérivée, on a*

$$\frac{dT(r, f)}{d\log r} = t(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n(r, e^{i\theta})\, d\theta\,.$$

La formule (3) définit $T(r, f)$ comme étant, à une constante additive près, la moyenne de $N(r, Z)$ pour les Z de module 1. Elle se généralise en considérant la moyenne pour les Z de module ρ [37]. On a à la place de la formule (2)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\theta}) - \rho e^{i\theta}\right| d\varphi - \log\left|f(0) - \rho e^{i\theta}\right| = N(r, \rho e^{i\theta}) - N(r, \infty)\,.$$

En intégrant les deux membres multipliés par $\frac{1}{2\pi}\, d\theta$ et procédant comme ci-dessus, on obtient la formule de H. Cartan qui généralise (3)

$$T\left(r, \frac{f}{\rho}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r, \rho e^{i\theta})\, d\theta + \log^+ \frac{|f(0)|}{\rho}\,. \qquad (4)$$

Or, si u et v sont positifs, on a, on le voit de suite

$$\log^+(uv) \leqslant \log^+ u + \log^+ v\,,$$

donc aussi

$$\log^+ u \leqslant \log^+ uv + \log^+ \frac{1}{v}\,.$$

Il s'ensuit que

$$-\log^+ \rho < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|\frac{f(re^{i\varphi})}{\rho}\right| d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|f(re^{i\varphi})\right| d\rho \leqslant \log^+ \frac{1}{\rho}$$

donc

$$-\log^+ \rho \leqslant T\left(r, \frac{f}{\rho}\right) - T(r, f) \leqslant \log^+ \frac{1}{\rho}$$

$$-\log^+ \rho \leqslant \log^+ \left|\frac{f(0)}{\rho}\right| - \log^+ |f(0)| \leqslant \log^+ \frac{1}{\rho}$$

et, par suite, d'après (4)

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(r, \rho e^{i\theta})\, d\theta + \log^+ |f(0)| + \theta\left(\log^+ \rho + \log^+ \frac{1}{\rho}\right), \quad -1 < \theta < 1 . \tag{5}$$

42. *Représentation sphérique. Formules de Cartan et Shimizu.*

On sait qu'on peut représenter les nombres complexes $z = x + iy$, sur une sphère de diamètre 1 tangente au plan Oxy à l'origine. Si P est le point de la sphère diamétralement opposé à O, on fait correspondre au point M (x, y) du plan Oxy le point m de la sphère situé sur PM. Le point m sera l'image sphérique du nombre z. Si le point M décrit un arc de courbe dont l'élément d'arc est $ds = |dz|$, le point m décrit un arc $d\sigma$ et les formules de l'inversion montrent que

$$d\sigma = \frac{ds}{1 + |z|^2} .$$

La longueur de l'image de la circonférence $|z| = \rho$ est donc $\frac{2\pi\rho}{1 + \rho^2}$. L'aire de la calotte sphérique image du cercle $|z| < \rho$ est

$$A(\rho) = \int_0^{\rho} \int_0^{2\pi} \frac{t\, dt\, d\theta}{(1 + t^2)^2} = \pi\left(1 - \frac{1}{1 + \rho^2}\right) = \pi \frac{\rho^2}{1 + \rho^2} .$$

La moyenne de $N(r, te^{i\theta})$ pour $t < \rho$, prise sur la sphère est

$$\frac{1 + \rho^2}{\pi\rho^2} \int_0^{\rho} \int_0^{2\pi} \frac{t\, N(r, te^{i\theta})\, dt\, d\theta}{(1 + t^2)^2}$$

et, en remplaçant $\int_0^{2\pi} N(r, te^{i\theta})\, d\theta$ par sa valeur tirée de (5), on obtient

$$T(r, f) - \log |f(0)| + \theta \frac{1 + \rho^2}{\rho^2} \int_0^{\rho} \frac{2t}{(1 + t^2)^2} \left(\log^+ t + \log^+ \frac{1}{t}\right) dt, \quad -1 < \theta < 1 .$$

Le coefficient de θ est borné pour $\rho > \rho_0 > 0$. On a donc cette conséquence:

Pour $\rho > \rho_0 > 0$, *la valeur absolue de la différence entre* T (r, f) *et la moyenne sphérique de* N (r, Z) *pour les* Z *de module moindre que* ρ *est bornée par un nombre fixe, ne dépendant que de* | f (0) |:

$$\left| T(r, f) - \frac{1}{A(\rho)} \int\int_{A(\rho)} N(r, Z)\, d\omega \right| < K . \tag{6}$$

En prenant ρ infini, on obtient un résultat de Shimizu [38]:

La différence entre T (r, f) *et la moyenne de* N (*r*, Z) *sur la sphère est bornée par un nombre indépendant de* r.

Ces propositions montrent que la fonction T (*r*, *f*), ou toute fonction qui n'en diffère que par une constante, ou une quantité bornée, est celle qui s'impose dans l'étude des propriétés moyennes de N (*r*, Z), tandis que sa dérivée peut caractériser les propriétés moyennes de *n* (*r*, Z).

43. *Limitation de* N(r, a). *Valeurs déficientes* V.

Si a est fini, on a

$$T(r, f - a) = N(r, \infty) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi}) - a|\, d\varphi .$$

On vérifie aisément que

$$\log^+ (u + v) \leqslant \log^+ u + \log^+ v + \log 2 ,$$

donc

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi}) - a|\, d\varphi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi \right| \leqslant \log^+ |a| + \log 2$$

et en conséquence

$$|T(r, f - a) - T(r, f)| \leqslant \log^+ |a| + \log 2 .$$

Comme, dans le cas général où $f(0) - a \neq 0$,

$$T(r, f - a) = N(r, a) + m(r, a) + \log |f(0) - a|$$

on obtient pour $N(r, a)$ une borne

$$N(r, a) < T(r, f) + \log^+ |a| - \log |f(0) - a| + \log 2 . \qquad (7)$$

dans laquelle, en dehors de $T(r, f)$ figure une expression qui est bornée si a s'écarte suffisamment de $f(0)$. Donc, si $|f(0) - a| > \alpha > 0$, on a

$$N(r, a) < T(r, f) + K' . \qquad (8)$$

Le rapprochement des inégalités (6) et (8), ou plus précisément de (8) et du théorème de Shimizu suggère évidemment que la différence entre $T(r, f)$ et $N(r, a)$ doit être en général relativement petite si $T(r, f)$ tend vers l'infini.

Supposons que f (z) *soit méromorphe dans tout le plan sauf à l'infini.* Si l'on admet le théorème de Picard, on sait que $f(z)$ prend une infinité de fois toute valeur sauf au plus deux valeurs exceptionnelles, donc si a n'est pas valeur exceptionnelle, $N(r, a)$ croît indéfiniment et le rapport de $N(r, a)$ à $\log r$ tend vers l'infini, donc, d'après (7)

$$\lim_{r=\infty} \frac{T(r, f)}{\log r} = \infty$$

D'une façon plus générale, si $T(r, f)$ était borné lorsque $r \to \infty$, $N(r, a)$ serait borné, donc $n(r, a) = 0$, $f(z) - a$ ne s'annulerait pour aucun a tel que $f(0) - a \neq 0$, $f(z)$ serait constant; les cas où

$$T(r, f) = 0 (\log r)$$

correspondent aux fractions rationnelles.

Si $T(r)$ tend vers l'infini avec r, comme la moyenne superficielle de $N(r, Z)$ sur la sphère diffère de $T(r)$ de moins de K, si l'on avait

$$N(r, Z) \leqslant T(r) - T(r)^{\frac{1}{2} + \varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0$$

dans des aires sphériques dont la somme serait $\dfrac{K''}{T(r)^{\frac{1}{2} + \varepsilon}}$, ces aires ne fourniraient qu'une contribution au plus égale à

$$\frac{K''}{T(r)^{\frac{1}{2} + \varepsilon}} T(r) - K''$$

et ailleurs, d'après (7) et (8), on aurait au plus

$$\left(\pi - \frac{K''}{T(r)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}\right) T(r) + K_2 \pi$$

ce qui donnerait une contradiction si K'' est assez grand. On a donc

$$N(r, Z) > T(r) - T(r)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \tag{9}$$

sauf au plus dans des aires de somme

$$\frac{K''}{T(r)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}.$$

Si nous remplaçons (9) par

$$N(r', Z) > T(r') - 2\,T(r')^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, \tag{10}$$

on voit que si (9) a lieu pour r, (10) a lieu pour

$$r \leqslant r' \leqslant r_1, \qquad T(r_1) = T(r) + T(r)^{\frac{1}{2}+\varepsilon};$$

et (10) aura encore lieu entre r_1 et r_2 défini par

$$T(r_2) = T(r_1) + T(r)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

à condition d'exclure de nouvelles aires. Au bout de $T(r)^{\frac{1}{2}}$ opérations on arrivera à atteindre un r_p pour lequel $T(r_p) \geqslant 2T(r)$; la somme des aires exclues sera moindre que

$$\frac{2\,K''}{T(r)^{2\varepsilon}}.$$

et (10) aura lieu dans un intervalle r, r'' avec $T(r'') = 2T(r)$. En itérant ce procédé, on voit que (10) aura lieu pour tous les r' pour les Z représentés à l'extérieur d'aires formant une série convergente. L'inégalité (10) aura lieu à partir d'une valeur r' pour tous les Z extérieurs à des aires dont la somme est aussi petite que l'on veut. Pour tous les Z représentés sur la sphère

à l'extérieur d'un ensemble de mesure superficielle nulle on a, pour $r > r(Z)$

$$N(r, Z) > T(r) - 2\,T(r)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0 .$$

En rapprochant cette inégalité de (7), on a ce résultat:

Le rapport de N (r, z) *à* T (r, f) *tend vers* 1 *lorsque* r *tend vers l'infini sauf pour un ensemble exceptionnel de valeurs de* Z. *Ces valeurs de* Z *sont appelées valeurs déficientes* V [39].

D'après la démonstration élémentaire qui vient d'être donnée, l'ensemble exceptionnel est au plus de mesure superficielle nulle. En réalité sa mesure linéaire est nulle et même davantage et la propriété est vraie pour les fonctions méromorphes dans un cercle lorsque $T(r, f)$ n'est pas borné [40]. Mais cet ensemble peut exister et avoir la puissance du continu (voir Valiron, premier mémoire cité ci-dessous). La propriété d'homogénéité de la distribution des valeurs Z ainsi mise en évidence subsiste aussi pour les fonctions algébroïdes méromorphes $u(z)$ définies par une équation

$$u^{\nu} A_{\nu}(z) + u^{\nu-1} A_{\nu-1}(z) + \ldots + A_0(z) = 0 ,$$

où les $A_j(z)$ sont des fonctions entières, la définition de $N(r, a)$ étant la même pour $u - a$ que pour $f - a$.

On remarquera que la propriété de $N(r, Z)$ montre que, pour les fonctions d'ordre nul de la classe normale,

$$T(r, f) \sim \log M(r, f).$$

44. *Formule de Nevanlinna.*

La formule de Jensen, dans le cas $f(0)$ fini non nul donne la valeur de $|f(0)|$ au moyen des modules des zéros, des pôles et de la moyenne de $|f(z)|$ pour $|z| = r$; elle a été généralisée par R. Nevanlinna. On peut obtenir sa formule en faisant une transformation homographique du cercle de rayon r sur lui-même. On a

$$\log |f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi + \sum_1^p \log \frac{r}{|b_j|} - \sum_1^n \log \frac{r}{|a_k|} \qquad (11)$$

les b_j étant les pôles et les a_k les zéros de $f(z)$ intérieurs au cercle $|z| < r$. On obtiendra une formule donnant $|f(z_0)|$, $|z_0| < r$ en faisant la transformation

$$\zeta = r^2 \frac{z - z_0}{r^2 - \bar{z}_0 z} \qquad F(\zeta) = f(z) \tag{12}$$

et en appliquant la formule (11) à $F(\zeta)$. La transformation de l'intégrale s'effectue en posant pour $z = re^{i\varphi}$, $\zeta = re^{i\psi}$, ce qui montre, en prenant les dérivées logarithmiques dans (12), que

$$d\varphi = \frac{r^2 - |z_0|^2}{r^2 + |z_0|^2 - 2r|z_0| \cos(\psi - \psi_0)} d\psi , \qquad z_0 = |z_0| e^{i\psi_0} .$$

On obtient ainsi la première formule de Nevanlinna

$$\log |f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\psi})| \frac{r^2 - |z_0|^2}{r^2 + |z_0|^2 - 2r|z_0| \cos(\psi - \psi_0)} d\psi +$$

$$+ \sum_1^p \log |\Phi(z_0, b_j| - \sum_1^n \log |\Phi(z_0, a_k| , \tag{13}$$

avec

$$\Phi(z, c) = \frac{r^2 - \bar{z}c}{r(c - z)} . \tag{14}$$

De cette formule, R. Nevanlinna en déduit une autre donnant la dérivée logarithmique [41].

45. *Comparaison de* T (r, f) *et log* M (r, f) *lorsque* f (z) *est une fonction entière.*

Si $f(z)$ est une fonction entière, on a

$$T(r, f) = m(r, \infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi < \log M(r, f) .$$

D'autre part, la formule (13) dans laquelle les termes relatifs aux pôles disparaissent et où, d'après (14) et (12), $|\Phi(z_0, a_k)| \geqslant 1$, donne

$$\log |f(z_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\psi})| \frac{r^2 - |z_0|^2}{(r - |z_0|)^2} d\psi$$

puisque

$$r^2 + |z_0|^2 - 2r|z_0|\cos(\psi - \psi_0) \geqslant (r - |z_0|)^2 .$$

Il s'ensuit que, en appliquant cette inégalité au point z_0 de module kr, $k < 1$, en lequel $|f(z_0)| = M(kr, f)$, on a

$$\log M(kr, f) \leqslant \frac{1+k}{1-k} T(r, f) .$$

De ces deux inégalités, on déduit (Nevanlinna)

$$\frac{1-k}{1+k} \log M(kr, f) < T(r, f) < \log M(r, f) , \qquad 0 < k < 1 . \qquad (15)$$

Il en résulte que

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log T(r, f)}{\log r} = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log_2 M(r, f)}{\log r}$$

l'ordre de T (r, f) *est égal à l'ordre de* f (z) *défini à l'aide de log* M (r, f).

On pourra définir la classe convergente ou divergente de l'ordre fini positif ρ au moyen de $T(r, f)$ au lieu de $\log M(r, f)$. On pourra définir un ordre précisé de $T(r, f)$ comme on l'a défini à partir de $\log M(r, f)$. Toutes ces définitions s'étendront d'elles-mêmes au cas où $f(z)$ est méromorphe.

La relation (15) reste évidemment imprécise dans les cas généraux, ou si l'on préfère, lorsque $f(z)$ est une fonction entière, la connaissance même très précise de $\log M(r, f)$ fournie par les coefficients du développement taylorien ne donne pas une connaissance précise de $T(r, f)$. Par exemple, si $f(z)$ est parfaitement régulière par rapport à un ordre précisé $\rho(r)$, (15) montre seulement que

$$H_\rho (1 - 0(1)) r^{\rho(r)} < T(r, f) < (1 + 0(1)) r^{\rho(r)} ,$$

où

$$H_\rho = \frac{1-k}{1+k} k^\rho , \qquad k < 1 .$$

On pourra choisir k pour obtenir le maximum de H_ρ.

L'emploi de la relation (15) et des inégalités entre $\log M(r, f)$ et $\log M(r, f')$ obtenues au n° 4 fournira des relations entre $T(r, f)$

et $T(r, f')$ [1]. Dans le cas général des fonctions méromorphes l'étude de ces relations utilise la considération des propriétés de la dérivée logarithmique [42].

46. *Remarques.*

I. Dans quelques cas simples, le calcul approché de $T(r, f)$ pour une fonction entière est aussi facile que celui de $\log M(r, f)$. C'est le cas pour les fonctions élémentaires, pour les fonctions de Mittag-Leffer, pour les fonctions d'ordre non entier dont les zéros ont tous le même argument et $n(r) \sim r^{\rho(r)}$. C'est aussi le cas pour les fonctions vérifiant certaines équations fonctionnelles simples. Ainsi, pour les solutions des équations de Poincaré

$$f(zs) = P(z, f(z)) , \qquad |s| > 1 ,$$

où $P(x, y)$ est un polynôme dont le degré q en y est supérieur à 1. On obtient

$$T(r|s|, f) = q\,T(r, f) + 0(\log r)$$

et, en itérant,

$$T(r_0|s|^n, f) \sim B(r_0)\,q^n ,$$

ce qui donne en posant $r = r_0|s|^n$,

$$T(r, f) \sim A(\log r)\,r^{\rho} , \qquad \rho = \frac{\log q}{\log|s|} ,$$

$A(x)$ étant une fonction périodique de période $\log|s|$. $A(x)$ est effectivement non constante dans certains cas, par exemple lorsque

$$f(z) = \prod_1^{\infty}\left(1 - \frac{z}{s^n}\right)^{2^{n-1}} , \qquad |s| = 16 ,$$

qui est solution de

$$f(zs) = (1 - z)\,[f(z)]^2 .$$

II. Soit une fonction méromorphe pour laquelle, pour $r > r_0$,

$$T(r, f) < A(\log r)^2 , \qquad A \text{ fini.} \tag{16}$$

On aura une inégalité analogue pour $N(r, \infty)$ et $N(r, s)$. On pourra donc former des produits infinis $g(z)$ et $h(z)$ admettant respectivement pour zéros les pôles et les zéros de $f(z)$ et l'on aura pour ces fonctions

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r, \varphi)}{(\log r)^2} < \infty , \qquad \varphi = g \quad \text{et} \quad \varphi = h . \tag{17}$$

Le quotient

$$K(z) = \frac{f(z)\, g(z)}{h(z)}$$

n'aura plus ni pôles ni zéros et l'on aura, d'après l'inégalité

$$\log^+ (uv) \leqslant \log^+ u + \log^+ v ,$$

$$T(r, K) \leqslant T(r, f) + T(r, g) + T\left(r, \frac{1}{h}\right)$$

$$T\left(r, \frac{1}{h}\right) = T(r, h) + h$$

donc

$$T(r, K) < B(\log r)^2 , \qquad r > r_0 .$$

Or $K(z)$ est une fonction entière sans zéros, donc de la forme $e^{l(z)}$; d'après la formule (15), sa partie réelle pour $|z| < r$ sera bornée par $B_1 (\log r)^2$, ce sera une constante d'après le théorème sur la partie réelle (n° 18). Toute fonction méromorphe vérifiant (16) est le quotient de deux fonctions entières vérifiant (17).

III. D'une façon générale, une fonction méromorphe $f(z)$ peut se mettre sous la forme du quotient de deux fonctions entières $g(z)$ et $h(z)$ sans zéros communs. On a

$$f = \frac{h}{g} , \qquad T(r, f) = N(r, \infty) + m(r, \infty) ,$$

$$m(r, \infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \frac{h(re^{i\varphi})}{g(re^{i\varphi})} \right| d\varphi$$

et, d'après le théorème de Jensen

$$N(r, \infty) + \log |c_q| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(re^{i\varphi})|\, d\varphi .$$

Si $|h| < |g|$ le $\log^+$ dans $m(r, \infty)$ est nul; si $|h| > |g|$ le $\log^+$ est égal à $\log\left|\frac{h}{g}\right| = \log|h| - \log|g|$. Par suite, on a

$$T(r, f) = \log|c_q| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \lambda(re^{i\varphi})\, d\varphi ,$$

$\lambda(z)$ étant le plus grand des deux nombres $|h(z)|$ et $|g(z)|$.

IV. Caractéristique de Shimizu-Ahlfors. Fonction L (r).

47. *Aire couverte par les valeurs de* f (z).

Considérons la fonction $Z = f(z)$ méromorphe pour $|z| \leqslant r$ et représentons les points Z sur la sphère de diamètre 1 déjà envisagée au n° 42. Lorsque z parcourt le cercle $|z| \leqslant r$, le point Z décrit une surface de Riemann transposée sur la sphère, c'est en général une surface à plusieurs feuillets. Nous appellerons $\pi S(r)$ l'aire totale de ces feuillets. On a vu que, à l'élément d'aire $dX\, dY$ du plan des X, Y ($Z = X + iY$) correspond sur la sphère un élément d'aire

$$d\omega = \frac{dX\, dY}{(1 + |Z|^2)^2} .$$

D'autre part, à l'élément d'aire $tdtd\varphi$ du point $te^{i\varphi}$ du plan z, la fonction $Z = f(z)$ fait correspondre l'élément d'aire

$$dX\, dY = |f'(z)|^2\, t\, dt\, d\varphi .$$

On a donc, sur la sphère,

$$d\omega = \frac{|f'(z)|^2}{(1 + |f(z)|^2)^2}\, td\, td\varphi$$

et

$$\pi S(r) = \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{|f'(te^{i\varphi})|^2}{(1 + |f(te^{i\varphi})|^2)^2}\, t\, dt\, d\varphi . \qquad (1)$$

Le second membre peut s'écrire autrement; $n(r, Z)$ est le nombre des feuillets de la surface de Riemann sphérique qui recouvrent

l'image de Z. On a donc aussi

$$\pi S(r) = \int\int_{\Sigma} n(r, Z)\, d\omega_Z \tag{2}$$

$d\omega_Z$ étant l'élément d'aire de la sphère Σ au point image de Z. En remplaçant r par $t \leqslant r$, divisant par t et intégrant de 0 à r, on obtient

$$\int_0^r \frac{S(t)}{t}\, dt = \frac{1}{\pi}\int\int_{\Sigma} N(r, Z)\, d\omega_Z$$

et d'après le théorème de Shimizu du n° 42, cette quantité est égale à la fonction $T(r, f)$ à une constante additive près qui est bornée quel que soit r. Il est donc loisible de prendre comme fonction caractéristique, à la place de $T(r, f)$ la fonction

$$\int_0^r \frac{S(t)}{t}\, dt$$

dont la dérivée donnée par (1) ou (2) a une interprétation géométrique simple. C'est ce qui avait été proposé par Bloch et a été utilisé systématiquement par Shimizu et Ahlfors [43].

48. *Fonction* L (r).

Lorsque le point z décrit la circonférence $|z| = r$, l'image sphérique de $Z = f(z)$ décrit une courbe $\Gamma = \Gamma_r$, qui est la frontière de la surface de Riemann décrite par Z et dont l'aire est $\pi S(r)$. Ahlfors a introduit, à côté de la fonction $S(r)$, la longueur $L(r)$ de cette courbe Γ_r. A l'élément d'arc $r d\varphi$ de la circonférence C_r, $|z| = r$, la transformation $Z = f(z)$ fait correspondre l'élément $|f'(re^{i\varphi})|\, r d\varphi$ et l'on a sur la sphère un élément

$$\frac{|f'(re^{i\varphi})|\, r d\varphi}{1 + |f(re^{i\varphi})|^2}.$$

Par conséquent,

$$L(r) = \int_0^{2\pi} \frac{|f'(re^{i\varphi})|\, r d\varphi}{1 + |f(re^{i\varphi})|^2}. \tag{3}$$

49. *Inégalité fondamentale.*

D'après l'égalité (1), on a

$$\frac{dS}{dr} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f'(re^{i\varphi})|^2}{(1 + |f(re^{i\varphi})|^2)^2} r d\varphi \tag{4}$$

et, en appliquant l'inégalité de Schwarz à l'intégrale (3), et tenant compte de (4)

$$L(r)^2 \leqslant \pi \frac{dS}{dr} 2\pi r .$$

Ainsi

$$L(r)^2 \leqslant 2\pi^2 r \frac{dS}{dr} . \tag{5}$$

On déduit de cette inégalité que, si le point à l'infini est point essentiel, L (r) est en général infiniment petit par rapport à S (r). Car, admettant toujours, comme au n° 43, le théorème de Picard, T (r, f)/logr n'est pas borné, donc S (r) n'est pas bornée. Si S (r) n'est pas borné, et si l'on suppose que dans certains intervalles, pour lesquels $r > r_0$, on a

$$L(r) > S(r)^{\frac{1}{2} + \varepsilon} , \qquad \varepsilon > 0 ,$$

on a, dans ces intervalles, d,

$$\frac{dr}{r} \leqslant 2\pi^2 \frac{dS}{S^{1+2\varepsilon}} ,$$

$$\int_d \frac{dr}{r} \leqslant \frac{2\pi^2}{2\varepsilon S(r_0)^{2\varepsilon}}$$

la variation totale de logr dans ces intervalles est finie. Ainsi, à l'extérieur d'intervalles dans lesquels la variation totale de logr est finie, on a

$$L(r) < S(r)^{\frac{1}{2} + \varepsilon} , \qquad \varepsilon > 0 .$$

(A suivre).

NOTES

22) Sur chaque feuillet, on ne conserve que les segments de rayon (ou le rayon) sur les deux bords desquels z a des valeurs distinctes.

23) Voir VALIRON, G.: Sur les surfaces de Riemann définies par certaines fonctions entières, *C.R. Acad. Sci., Paris*, **208**, p. 711-713 (1939).

24) Pour une construction de fonctions plus générales, voir VALIRON, G.: Sur les singularités de certaines fonctions holomorphes et de leurs inverses, *J. Math. pures appl.*, **15**, p. 423-435 (1936). Pour l'exemple particulier donné ici, voir VALIRON, G.: Sur les singularités des fonctions holomorphes dans un cercle. *C.R. Acad. Sci., Paris*, **198**, p. 2065-2067 (1934).

25) On suppose, ce qui est loisible, L et L' issus d'un même point et ne se coupant pas.

26) Il est équivalent de dire que l'indicatrice T (r) de Nevanlinna de la fonction méromorphe, qui sera définie au § III, vérifie la condition $\frac{T(r)}{(10\, g\, r)^2} < \infty$.

27) Voir VALIRON, G.: Sur le nombre des singularités transcendantes des fonctions inverses d'une classe d'algébroïdes, *C. R. Acad. Sci., Paris*, **200**, p. 713-715 (1935).

28) Voir TUMURA, Y.: Sur les théorèmes de M. Valiron et les singularités transcendantes indirectement critiques, *Proc. Imp. Acad. Jap.*, **17**, p. 65-69 (1941).

29) Voir VALIRON, G.: Sur les valeurs asymptotiques de quelques fonctions méromorphes, *Rendic. del Circ. Math. di Palermo*, **49**, p. 415-421 (1925).

30) On suppose Z_1 fini; si Z_1 est infini on considère Z comme variable.

31) Si Ω est infini, on prend $1/2$ pour variable.

32) Le théorème d'Iversen est démontré par son auteur d'une autre façon : IVERSEN, F.: Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes, Thèse, Helsingfors, 1914. Pour la démonstration donnée ici voir VALIRON, G.: Démonstration de l'existence pour les fonctions entières de chemins de détermination infinie, *C. R. Acad. Sci., Paris*, **166**,, p. 382-384 (1918), et NEVANLINNA, R.: Eindeutige analytische Funktionen (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 46), p. 275, Springer, Berlin, 1re édition, 1936.

33) Voir AHLFORS, L.: Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen, *Acta, Soc. Sci. Fennicae*, **1**, Nr. 9 (40 pages), (1930); AHLFORS, L.: Über die asymptotischen Werte der meromorphen Funktionen endlicher Ordnung. *Acta Acad. Aboensis. Math. et Phys.*, **6**, Nr. 9 (1932); NEVANLINNA, R.: loc. cit.: [32], p. 293.

34) Voir VALIRON, G.: Remarques sur les domaines complets d'univalence des fonctions entières, *Bull. Sci. math.*, (2), **63**, p. 132-138 (1939), et VALIRON, G.: Division en feuillets de la surface de Riemann définie par $w = \frac{e^z - 1}{z} + h$. *J. Math. pures appl.*, (IX), **19**, p. 339-358 (1940).

35) SHIMIZU, T.: On the foundamental domains and the groups for meromorphic functions, *Jap. J. Math.*, **8**,, p. 175-304 (1931-1932); MARTY, F.: Recherches sur la répartition des valeurs d'une fonction méromorphe (Thèse), *Ann. Toulouse*, (3) **23**, p. 183-262 (1932).

36) CARTAN, H.: Sur la fonction de croissance attachée à une fonction méromorphe de deux variables, et ses applications aux fonctions méromorphes d'une variable, *C. R. Acad. Sci., Paris*, **189**, p. 521-523 (1929).

37) VALIRON, G.: Sur les fonctions algébroïdes méromorphes du second degré, *C.R. Acad. Sci., Paris*, **189**, p. 623-625 (1929).

38) SHIMIZU, T.: On the theory of meromorphic functions, *Japanese Journ. of Math.*, **6**, p. 119-171 (1929). — La restriction $\rho > \rho_0$, faite ci-dessus, tombe puisque pour $\rho < 1$, on peut remplacer T (r, f) oar T $(r, \frac{1}{f})$.

39) Voir VALIRON, G.: Sur la distribution des valeurs des fonctions méromorphes, *Acta Math.*, **47**, p. 117-142 (1925); NEVANLINNA, R.: Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes (Collection de monographies sur la théorie des fonctions), Gauthier-Villars, Paris, 1929; LITTLEWOOD, J. E.: Mathematical notes. X : On a theorem of Zygmund, *J. London Math. Soc.*, **4**, p. 305-307 (1929); VALIRON, G.:

Sur quelques propriétés de fonctions algébroïdes, *C. R. Acad. Sci., Paris*, **189**, p. 824-826 (1929), et: Sur les fonctions algébroïdes méromorphes, *C. R. Acad. Sci., Paris*, **189**, p. 729-731 (1929), ainsi que: loc. cit.: 37); AHLFORS, L.: Beiträge zur Theorie des meromorphen Funktionen, *C. R. du 7e Congrès des mathématiciens scandinaves tenu à Oslo, 19-22 août 1929*, p. 84-88 (1930).

40) AHLFORS, L.: loc. cit.: [33].

41) Voir NEVANLINNA, R.: loc. cit.: [32]; loc. cit.: [39], et VALIRON, G.: loc. cit.: [5].

42) Voir, à ce sujet, VALIRON, G.: *Acta, Math.*, loc. cit.: [39], et VALIRON, G.: Sur la dérivée des fonctions algébroïdes, *Bull. Soc. math. France*, **59**, p. 17-39 (1931), ainsi que NEVANLINNA, R.: loc. cit.: [32].

43) BLOCH, A.: Les fonctions holomorphes et méromorphes dans le cercle unité. (Mémorial des sciences mathématiques, fasc. 20), Gauthier-Villars, Paris, 1926; SHIMIZU, T.: loc. cit.: [38], et AHLFORS, L.: loc. cit.: [39].