Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 4 (1958)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ZUR ELEMENTAREN DREIECKSGEOMETRIE IN DER KOMPLEXEN EBENE

Autor: Hofmann, Jos. E.

Kapitel: 3. VOM RICHTUNGSMASS UND VON DER GERADENGLEICHUNG.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-34635

3. Vom Richtungsmass und von der Geradengleichung.

(3, 1) Wir geben die Punkte a, b auf dem Einheitskreis und legen durch den Kreismittelpunkt O den parallelen Durchmesser zur Sehne (a, b), dessen Endpunkte x und $-x$ seien. Jetzt ist also $-x^2 = ab$. Das Produkt ab wollen wir das *Richtungsmaß* der Sehne (a, b) nennen. *Sehnen mit dem nämlichen Richtungsmaß sind parallel.*

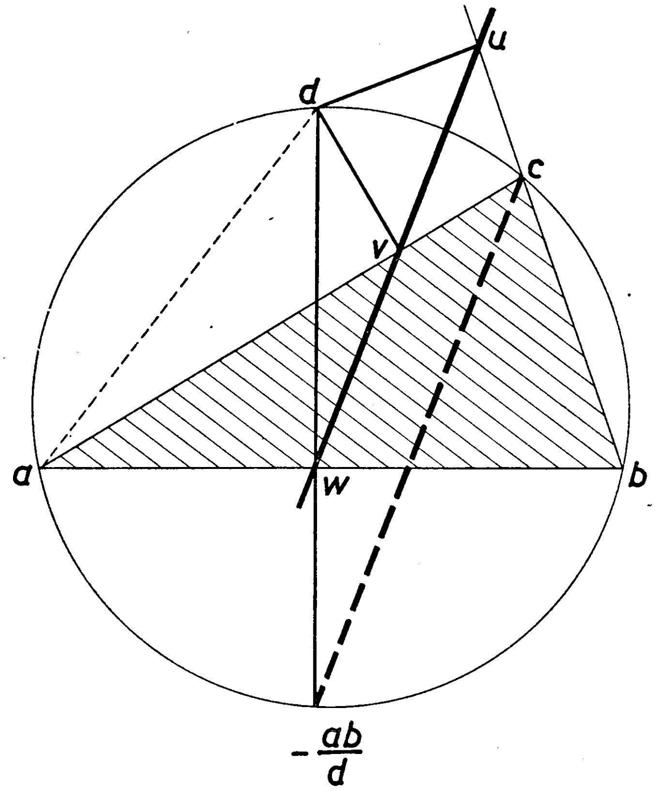

Abb. 7.
Zum Satz von der Wallace-Geraden.

Als Anwendungsbeispiel behandeln wir den Satz von der Wallace-Geraden [7]: Geben wir auf dem Einheitskreis die vier Punkte a, b, c, d, dann treffen die Lote aus d auf die Seiten (b, c), (c, a), (a, b) des Dreiecks (a, b, c) bez. in den Punkten

$$u = \frac{1}{2}\left(b + c + d - \frac{bc}{d}\right),$$

$$v = \frac{1}{2}\left(c + a + d - \frac{ca}{d}\right),$$

$$w = \frac{1}{2}\left(a + b + d - \frac{ab}{d}\right)$$

ein. Wir behaupten:

---

7) W. Wallace in Th. Leybourne, *Mathematical repository* (old series) 2, 1798, 111.

Die Punkte u, v, w *liegen in einer und der nämlichen Geraden, der* WALLACE-*Geraden des Dreiecks* (a, b, c) *hinsichtlich des Punktes* d *auf dem Umkreis des Dreiecks.*

Z.B. ist (a, w, v, d) ein Sehnenviereck, jedoch nicht im Einheitskreis. Folglich ist

$$\sphericalangle (d, a, v) = \sphericalangle (d, w, v) \, .$$

Die Parallele durch c zu (v, w) schneidet die verlängerte (d, w) unter dem nämlichen Winkel. Dieser Schnittpunkt liegt auf dem Einheitskreis. Da aber (a, b) und (d, w) auf einander senkrecht stehen, wird der Schnittpunkt durch $\left(-\frac{ab}{d}\right)$ dargestellt. Das Richtungsmaß der Geraden (v, w) ist also $\left(-\frac{abc}{d}\right)$. Dieser Ausdruck ist in a, b, c symmetrisch. Also haben die drei Geraden (v, w), (w, u), (u, v) das nämliche Richtungsmaß; folglich fallen sie zusammen.

(3, 2) Wir geben zwei Umfangspunkte a, b auf dem Einheitskreis und einen Punkt z, der nicht auf der Geraden (a, b) liegt (Abb. 8). Dann ergänzen wir a, O, b durch $(a + b)$ zur Raute und spiegeln z an der Rautendiagonale $(O, a + b)$ in s. Indem wir die Einheitsvektoren $\frac{s}{|s|}$ und $\frac{z}{|z|}$ bilden, erhalten wir die Schnittpunkte der Ortsvektoren s und z (oder ihrer Verlängerungen über die Spitze hinaus) mit dem Einheitskreis. Die Verbindungsstrecke dieser Einheitsvektoren ist parallel zur Sehne (a, b); also ist $\frac{s}{|s|}\frac{z}{|z|} = ab$. Nun ist aber $|s| = |z|$; also $|s|\,|z| = z\bar{z}$; somit

$$\boxed{s = ab\bar{z}} \, .$$

Jetzt spiegeln wir z am Sehnenmittelpunkt $\frac{a+b}{2}$ in $\sigma = a + b - z$ und s am nämlichen Punkt in

$$\boxed{\zeta = a + b - ab\bar{z}} \, .$$

Nun ist ζ gleichzeitig Spiegelpunkt von z an der Sehne (a, b). Wenn wir einen Punkt z *auf* der Sehne vor uns haben, dann und nur dann ist $\zeta = z$. Folglich ist

$$\boxed{z + ab\bar{z} = a + b}$$

die Gleichung der Geraden (a, b). Die linke Seite $z + ab\bar{z}$ nennen wir den *Richtungsteil*; er ist durch das Richtungsmaß eindeutig bestimmt. Die rechte Seite nennen wir das *konstante Glied.* Es

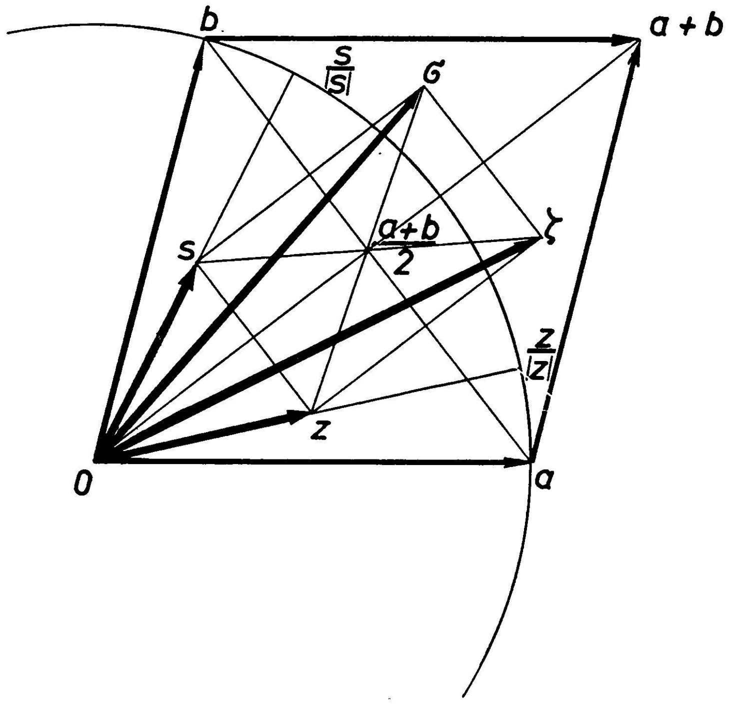

Abb. 8.
Geradengleichung.

wird durch Einsetzen der Endpunkte der Sehnen (oder allgemeiner: eines bekannten Punktes der Geraden) in die Gleichung bestimmt. Das liefert — da wir z sowohl durch a wie durch b ersetzen können — eine Probe.

(3, 3) Nun kehren wir zur WALLACE-Geraden (3, 1) zurück. Der Richtungsteil ihrer Gleichung ist $z - \frac{abc}{d}\bar{z}$; das konstante Glied ergibt sich z.B. durch Einsetzen von $z = u$. Wir erhalten nach leichter Umformung

$$\boxed{z - \frac{abc}{d}\bar{z} = \frac{1}{2}(a + b + c + d) - \frac{abc}{d}(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d})}\ .$$

Diese Gleichung ist in a, b, c symmetrisch; deshalb geht die durch sie dargestellte Gerade nicht nur durch u, sondern auch durch v

und w. Natürlich läßt sich das auch durch Einsetzen nachprüfen. Außerdem liegt auch der Punkt $t = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$ auf der WALLACE-Geraden. Hier ist $\frac{1}{2}(a + b + c)$ der Mittelpunkt des zum Dreieck (a, b, c) gehörigen FEUERBACH-Kreises; an ihn ist noch der Vektor $\frac{d}{2}$ der Länge $\frac{1}{2}$ angesetzt. Folglich liegt t auf diesem FEUERBACH-Kreis, aber nicht nur auf ihm, sondern auch auf den FEUERBACH-Kreisen der Dreiecke (b, c, d), (c, a, d), (a, b, d).

Wird in einem Sehnenviereck zu jeder Ecke die WALLACE-*Gerade hinsichtlich des Dreiecks der drei anderen Ecken bestimmt, dann gehen die vier so entstehenden Geraden durch einen und den nämlichen Punkt, nämlich durch den gemeinsamen Schnittpunkt der* FEUERBACH-*Kreise dieser vier Dreiecke*[8].

4. WEITERE ANWENDUNGSBEISPIELE.

(4, 1) Wir behaupten:

Die bez. Parallelen zu den inneren Winkelhalbierenden eines Dreiecks durch dessen Seitenmitten schneiden sich in einem Punkt.

Wie am Ende von (2, 2) bezeichnen wir die Ecken des Dreiecks im Einheitskreis mit p^2, q^2, r^2. Folglich sind die Mitten der Gegenbögen zu den Ecken auf dem Einheitskreis $(-qr)$, $(-rp)$, $(-pq)$ zu nennen. Die innere Halbierende des Winkels (q^2, p^2, r^2) geht durch p^2 und $(-qr)$; sie hat also den Richtungsteil $z - p^2 qr\bar{z}$. Die Parallele zu dieser Winkelhalbierenden durch den Seitenmittelpunkt $\frac{1}{2}(q^2 + r^2)$ hat die Gleichung $z - p^2 qr\bar{z} = \frac{1}{2}\left(q^2 + r^2 - p^2 \cdot \frac{r}{q} - p^2 \cdot \frac{q}{r}\right)$. Entsprechend:

$$z - pq^2 r\bar{z} = \frac{1}{2}\left(p^2 + r^2 - q^2 \cdot \frac{r}{p} - q^2 \cdot \frac{p}{r}\right) .$$

Indem wir die mit q multiplizierte erste Gleichung von der mit p multiplizierten zweiten subtrahieren und mit $p - q$ dividieren, erhalten wir

$$z = \frac{1}{2}(p^2 + q^2 + r^2 + qr + rp + pq) .$$

---

[8]) Aufgabe von É. LEMOINE in den *Nouv. annal.* (2). *8*, 1867, 47.