

# 1. VOM HÖHENSCHNITTPUNKT, VOM FEUERBACH-KREIS UND VERWANDTEN PROBLEMEN.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# ZUR ELEMENTAREN DREIECKSGEOMETRIE IN DER KOMPLEXEN EBENE

von Jos. E. HOFMANN (Ichenhausen)

*(Reçu le 17 juillet 1958.)*

Einige Fragen der elementaren Dreiecksgeometrie lassen sich besonders einfach in Vektorform behandeln, wenn der Umkreismittelpunkt des Dreiecks als Bezugspunkt verwendet wird. Machen wir den Umkreishalbmesser zur Einheit, dann sind die Ortsvektoren  $a$ ,  $b$ ,  $c$  der gleichbenannten Ecken Einheitsvektoren, die wir zweckmäßig als komplexe Zahlen schreiben. Wird ein Punkt auf dem Einheitskreis durch die komplexe Zahl  $z$  dargestellt, dann wird sein Spiegelpunkt  $\bar{z}$  an der reellen Achse durch  $\frac{1}{z}$  wiedergegeben. Die nachfolgenden Beispiele sollen zeigen, wie sich die vektorielle Auffassung und die Beziehung  $\bar{z} = \frac{1}{z}$  vereinfachend und nutzbringend verwenden lassen.

## 1. VOM HÖHENSCHNITTPUNKT, VOM FEUERBACH-KREIS UND VERWANDTEN PROBLEMEN.

(1, 1) Es seien  $a$ ,  $b$ ,  $c$  die Ortsvektoren der Ecken eines Sehnendreiecks im Einheitskreis (Abb. 1). Dann ist  $(a + b)$  der Spiegelpunkt des Umkreismittelpunktes  $O$  an der Sehne  $(a, b)$ ; also steht der Ortsvektor  $(a + b)$  auf der Sehne senkrecht. Ergänzen wir nunmehr  $(a + b)$  und  $c$  hinsichtlich  $O$  zum Parallelogramm, dann ist

$$a + b + c = d$$

der Ortsvektor, der auf der Diagonalen dieses Parallelogramms aus  $O$  liegt. Folglich fällt die Gerade  $(c, d)$  auf die Dreieckshöhe

aus  $c$  auf die Gegenseite  $(a, b)$ . Da die Vektoraddition kommutativ und assoziativ ist, befindet sich  $d$  auch auf den Höhen aus  $a$  auf  $(b, c)$  und aus  $b$  auf  $(c, a)$ . Damit ist gezeigt, daß sich die drei Höhen des Dreiecks genau in *einem* Punkt schneiden, nämlich im *Höhenschnittpunkt*  $d = a + b + c$ . Sehen wir für den Augenblick vom Umkreis ab, dann sind die vier Punkte  $a, b, c, d$  völlig gleichberechtigt; jeder von ihnen ist Höhenschnittpunkt des aus den drei anderen Punkten bestimmten Dreiecks. Wir reden deshalb zweckmäßig von *vier orthogonal verbundenen Punkten*.

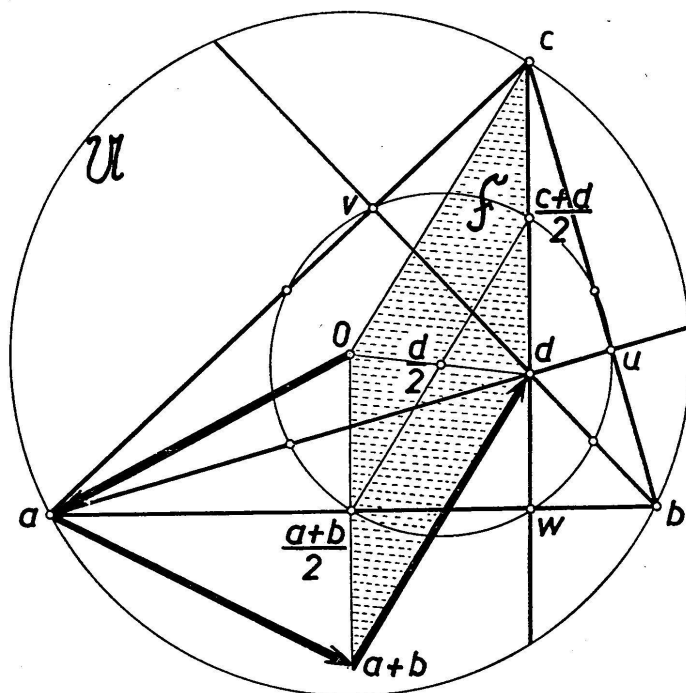


Abb. 1.

Umkreis, Höhenschnittpunkt und Feuerbach-Kreis.

(1, 2) Nun ist  $\frac{a+b}{2}$  Mittelpunkt der Sehne  $(a, b)$  und des Ortsvektors  $(a + b)$ . Die Parallele durch  $\frac{a+b}{2}$  zum Ortsvektor  $c$  trifft auf den Höhenabschnitt  $(c, d)$  in dessen Mittelpunkt  $\frac{c+d}{2}$ , und  $\frac{d}{2}$  ist der Mittelpunkt des durch  $(O, a + b, d, c)$  bestimmten Parallelogramms. Folglich geht der Kreis des Halbmessers  $\frac{1}{2}$  um  $\frac{d}{2}$ , den Mittelpunkt des Ortsvektors  $d$ , durch die Seitenmittelpunkte  $\frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}, \frac{a+b}{2}$ , durch die Mittelpunkte  $\frac{a+d}{2}, \frac{b+d}{2}$ ,

$\frac{c+d}{2}$  der „oberen Höhenabschnitte“ und durch die Höhenfußpunkte  $u, v, w$  des Dreiecks, ist also dessen FEUERBACH-Kreis <sup>1)</sup>. Etwas anders ausgedrückt:

*Sind die vier Punkte  $a, b, c, d$  orthogonal verbunden, dann haben die vier aus je dreien dieser Punkte bestimmten Dreiecke den nämlichen FEUERBACH-Kreis. Er geht einerseits durch die sechs Seitenmitten des aus diesen Punkten bestimmten vollständigen Vierecks, andererseits durch dessen Nebenecken.*

(1, 3) Fügen wir zu den Ecken  $a, b, c, d$  der Abb. 1 noch die Punkte  $(b+c), (c+a), (a+b)$  hinzu (Abb. 2), dann liegen diese Punkte auf dem Einheitskreis um  $d$ . Sie sind die Ecken eines neuen Dreiecks, das zum ursprünglichen hinsichtlich  $\frac{d}{2}$  symmetrisch liegt und  $O$  zum Höhenschnittpunkt hat. Auch die

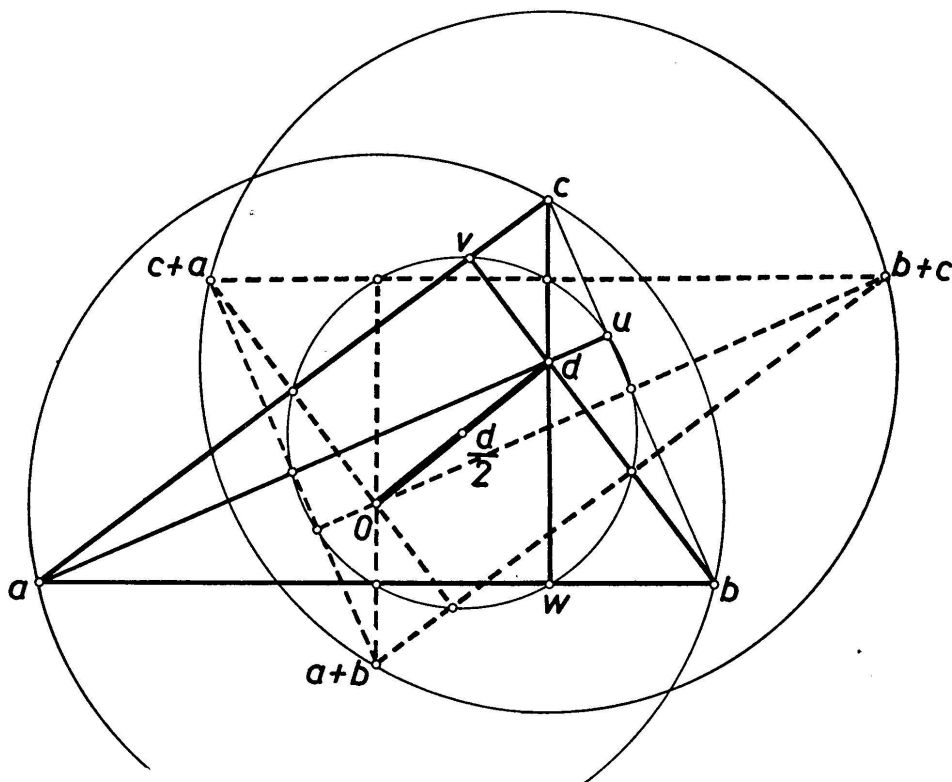


Abb. 2.

Ein Paar zugeordneter Dreiecke.

<sup>1)</sup> K. W. FEUERBACH, *Eigenschaften einiger merkwürdiger Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmter Linien und Figuren*. Nürnberg 1822. Zur Literatur vgl. J. S. MACKAY, *Proceedings Edinburgh Math. Soc.* 11, 1893, 19 ff. und J. LANGE, *Geschichte des Feuerbachschen Kreises*, Programm Berlin 1894; ferner M. SIMON, *Über die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX. Jh.*, Jahresbericht d. Deutschen Math.-Vereinigg., Ergänzungsband I, Leipzig 1906, 124/30 und M. ZACHARIAS in der *Encyklopädie der math. Wiss.*, III AB 9, Leipzig 1914.

Punkte  $O$ ,  $(b + c)$ ,  $(c + a)$ ,  $(a + b)$  sind orthogonal verbunden; die Seitenmitten des Dreiecks  $(a, b, c)$  sind die Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte des Dreiecks  $(b + c, c + a, a + b)$  und umgekehrt. Wir haben also acht Dreiecke mit dem nämlichen FEUERBACH-Kreis und zwölf auf diesem liegende Punkte. Die Zentrale  $(O, d)$  der beiden kongruenten Kreise ist die EULERSche Gerade <sup>2)</sup> der beiden Dreiecke. Auf ihr liegen auch die Schwerpunkte  $\frac{d}{3}$  des ursprünglichen und  $\frac{2d}{3}$  des zugeordneten Dreiecks.

(1, 4) Sind zwei der fünf Punkte  $O$ ,  $\frac{d}{3}$ ,  $\frac{d}{2}$ ,  $\frac{2d}{3}$ ,  $d$  bekannt, dann sind die anderen mitbestimmt. Kennen wir außerdem noch den Halbmesser des FEUERBACH-Kreises oder eines der beiden Umkreise, dann sind uns diese drei Kreise nebst ihren Mittelpunkten bekannt. Es gibt unter einer nachher zu besprechenden Einschränkung  $\infty^1$  Dreiecke  $(a, b, c)$ , die dem Kreis um  $O$  einbeschrieben sind und  $d$  zum Höhenschnittpunkt haben. Wählen wir z.B. die Ecke  $c$  auf dem Kreis um  $O$ , dann ist die Gegenecke  $(a + b)$  auf dem Kreis um  $d$  als Spiegelbild an  $\frac{d}{2}$  bestimmt. Die Parallelen  $(c, d)$  bzw.  $(O, a + b)$  treffen den FEUERBACH-Kreis in den Ecken eines Rechtecks, dessen andere Seiten die anderen Ecken  $a, b$  bzw.  $(b + c), (c + a)$  der zugeordneten Dreiecke tragen.

Ist Dreieck  $(a, b, c)$  *spitzwinklig*, dann liegt  $d$  *innerhalb* des Umkreises um  $O$ . Ist das Dreieck *rechtwinklig*, dann befindet sich  $d$  *auf* dem Umkreis. In diesem Fall berühren sich der FEUERBACH-Kreis und der Umkreis in  $d$ , und der Ortsvektor  $d$  ist der Durchmesser des FEUERBACH-Kreises. Ist Dreieck  $(a, b, c)$  *stumpfwinklig*, dann liegt  $d$  *außerhalb* des Kreises um  $O$ , jedoch so, daß der FEUERBACH-Kreis den Umkreis *schneidet*. Abb. 3 zeigt, wie die Verhältnisse nunmehr liegen.

(1, 5) Weil die aus orthogonal verbundenen Punkten  $a, b, c, d$  entstehenden Dreiecke  $(b, c, d)$ ,  $(c, a, d)$ ,  $(a, b, d)$  und  $(a, b, c)$  den nämlichen FEUERBACH-Kreis haben, sind ihre Umkreise *kongruent*. Die Mittelpunkte dieser Umkreise sind die zuge-

<sup>2)</sup> L. EULER, *Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum*, Novi commentarii Ac. sc. Petrop., 11 (1765), 1767, 103/23, insbes. 114; *Opera omnia*, XXVI, ed. Andr. Speiser, Zürich 1953, 139/57, insbesondere 149. Die Abhandlung wurde der Petersburger Akademie am 21. XII. 1763 alten Stiles vorgelegt.

ordneten Punkte  $(b + c)$ ,  $(c + a)$ ,  $(a + b)$ ,  $O$ , die ihrerseits ebenfalls orthogonal verbunden sind und vier Dreiecke erzeugen, deren Umkreise ebenfalls zu den bisherigen kongruent sind und die Mittelpunkte  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  haben. Die so entstandenen acht Kreise durchschneiden sich je zu dritt in den Ecken der beiden zusammengehörigen orthogonal verbundenen Punktequadrupel.

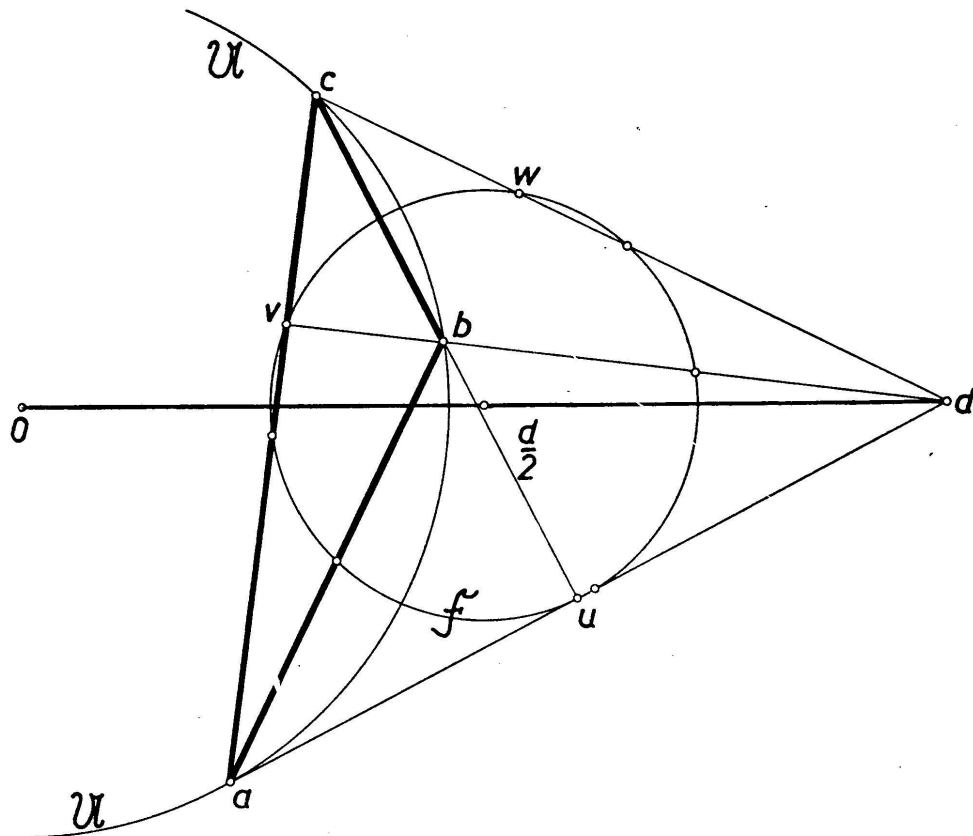


Abb. 3.

Das erzeugende Dreieck ist stumpfwinklig.

Die Gleichwertigkeit von vier orthogonal verbundenen Punkten  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  zeigt sich besonders schön am HOLZschen Dreiecksatz <sup>3)</sup>:

*Die drei von einer Ecke ausgehenden Pfeile zu den anderen Ecken hin, lassen sich stets durch Ansetzen eines dieser Pfeile an der Spitze eines der beiden anderen in entgegengesetzter Richtung zu einem dreiteiligen Sehnenzug im Einheitskreis vereinigen, dessen Endpunkte entgegengesetzte Punkte des Einheitskreises sind.*

<sup>3)</sup> K. B. HOLZ, *Das ebene obere Dreieck*, Hagen i.W. 1944. Vgl. auch L. BIEBERBACH, *Theorie der geometrischen Konstruktionen*, Basel 1952, 114/15 und 156.

Soll das orthogonal verbundene Quadrupel aus den Längen der Pfeile bestimmt werden, dann entsteht eine kubische Gleichung für den Durchmesser des Kreises, in den der Streckenzug eingepaßt werden kann <sup>4)</sup>. Diese Gleichung hat drei reelle Lösungen; die Anordnung der (in ihrer Reihenfolge vertauschbaren) Pfeile in diesen Kreisen wird genau durch die drei Arten der Abb. 4 veranschaulicht <sup>5)</sup>.

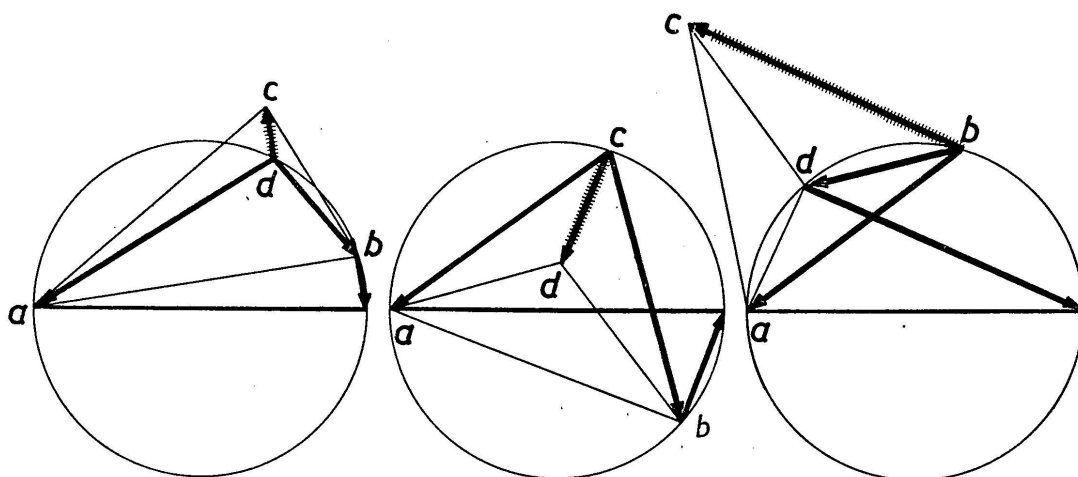


Abb. 4.  
Der Holzsch's Satz.

## 2. VON DER BOGENGLEICHHEIT.

(2, 1) Sind  $(a, b)$  und  $(c, d)$  zwei Paralleelsehnen im Einheitskreis (Abb. 5), dann sind die Kreisbögen zwischen den Parallelen gleich groß. Prägen wir ihnen den positiven Gegenuhrzeigersinn

<sup>4)</sup> Das Einpassungsproblem wird heute allgemein nach I. NEWTON, *Arithmetica universalis*, Kap. XIII, 8./10. Vorlesung von 1675/76, ed. W. WHISTON, Cambridge 1707, 97/113 genannt, so z.B. bei H. DÖRRIE, *Mathematische Miniaturen*, Breslau 1943, 31. Es stammt jedoch nicht von NEWTON, sondern von Fr. van SCHOOTEN, *De organica conicarum sectionum in plano descriptione tractatus...*, cui subnexa est appendix de cubicarum aequationum resolutione, Leiden 1646, 102/08 und 111/17, in verbesserter Form wiederabgedruckt in R. DESCARTES, *Geometrie* ed. Fr. van Schooten, I, Amsterdam 1659, 354/59 und 361/67. Dies wird die Vorlage für Newton gewesen sein, der diese Ausgabe der *Geometria* besaß.

Setzen wir z.B.  $|b, c| = u$ ,  $|c, a| = v$ ,  $|a, b| = w$ , dann heißt die (bereits bei Schooten auftretende) kubische Gleichung

$$x^3 = (u^2 + v^2 + w^2)x + 2uvw.$$

<sup>5)</sup> Diese drei Fälle treten auch bei SCHOOTEN <sup>4)</sup> und NEWTON <sup>4)</sup> auf. Auch die elegante kinematische Lösung bei BIEBERBACH <sup>3)</sup>, 115/16 vermittelt eines transparenten Blattes und des Stechzirkels erweist sich bei genauerem Zusehen als Variante der Lösung von SCHOOTEN. Dieser arbeitet im Anschluß an Fr. VIÈTE, *Supplementum geometriae*, Tours 1593, Wiederdruck in den *Opera*, ed. Fr. van Schooten, Leiden 1646, vermittelt einer Einschiebung, die mit der Winkeldreiteilung zusammenhängt.